Corrigé du baccalauréat Métropole 20 juin 2024 J2 (dévoilé)

Sujet 2

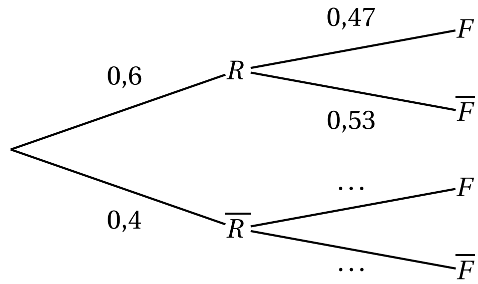
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

1.



a. Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.

b. On a $p(R \cap F) = p(R) \times p_R(F) = 0,6 \times 0,47 = 0,282$.

2. Il faut trouver $p_{\overline{R}}(F)$

D'après la loi des probabilités totales, on a :

$p(F) = p(F \cap R) + p\left(F \cap \overline{R}\right) = p(R \cap F) + p\left(\overline{R} \cap F\right)$, soit :

$0,38 = 0,282 + p\left(\overline{R} \cap F\right)$, d'où $p\left(\overline{R} \cap F\right) = 0,38 - 0,282 = 0,098$.

Puis $p_{\overline{R}}(F) = \dfrac{\overline{R} \cap F}{\overline{R}} = \dfrac{0,098}{0,4} = 0,0245$.

3. On a $p_F(R) = \dfrac{p(F \cap R)}{p(F)} = \dfrac{0,282}{0,38} \approx 0,74$, soit 74 %. L'affirmation est fausse.

4. **a.** Le choix des 20 clients s'effectue de façon indépendante et chaque tirage correspond à un choix de probabilité 0,38, la variable aléatoire X donnant le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité est une loi binomiale de paramètres $n = 20,\ p = 0,38$.

b. On a $p(X \leqslant 4) \approx 0,0726$, donc $p(X \geqslant 5) \approx 1 - 0,0726$ soit environ 0,9273 soit 0,927 au millième près.

Partie B

1. La variable aléatoire X_2 suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$ donc son espérance $E(X_2)$ est égale à $np = 1\,000 \times 0,47 = 470$.

Cela signifie qu'en moyenne, sur un échantillon de 1 000 clients réguliers, il y en aura 470 qui ont acheté la carte de fidélité.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y}{1\,000}$.

2. La variable Z représente la moyenne par client des montants offerts aux 1 000 clients.

- On utilise la linéarité de l'espérance.
  $Z = \dfrac{Y}{1\,000}$ donc $E(Z) = \dfrac{E(Y)}{1\,000}$, et $Y = Y_1 + Y_2$ donc $E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2)$.
  De plus, $Y_2 = 50X_2$ donc $E(Y_2) = 50E(X_2) = 50 \times 470 = 23\,500$
  On sait que $E(Y_1) = 30\,000$.
  On en déduit que : $E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2) = 30\,000 + 23\,500 = 53\,500$, et donc que $E(Z) = \dfrac{E(Y)}{1\,000} = \dfrac{53\,500}{1\,000} = 53,5$.
- Les variables étant indépendantes, on va utiliser l'additivité de la variance.
  $V(Y) = V(Y_1 + Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2)$, $V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2V(X_2) = 2\,500V(X_2)$, et $V(Z) = V\left(\dfrac{Y}{1\,000}\right) = \dfrac{V(Y)}{1\,000^2} = \dfrac{V(Y)}{10^6}$
  La variable aléatoire X_2 suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$ donc sa variance $V(X_2)$ est égale à $np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times (1 - 0,47) = 249,1$.
  On en déduit que $V(Y_2) = 2\,500V(X_2) = 2\,500 \times 249,1 = 622\,750$.
  On sait que $V(Y_1) = 100\,000$ donc
  $V(Y) = V(Y_1) + V(Y_2) = 100\,000 + 622\,750 = 722\,750$.
  $V(Z) = \dfrac{V(Y)}{10^6} = \dfrac{722\,750}{10^6} = 0{,}722\,75$

3. La variable aléatoire Z a pour espérance $E(Z) = 53,5$ et pour variance $V(Z) = 0{,}722\,75$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

pour tout $\delta \in \left]0\,;\,+\infty\right[$, $P\left(\left|Z - E(Z)\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(Z)}{\delta^2}$.

$$\begin{aligned} 51,7 < Z < 55,3 &\iff 53,5 - 1,8 < Z < 53,5 + 1,8 \iff -1,8 < Z - 53,5 < 1,8 \\ &\iff \left|Z - 53,5\right| < 1,8 \end{aligned}$$

En remplaçant $E(Z)$ et $V(Z)$ par leurs valeurs, et en prenant $\delta = 1,8$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev devient : $P\left(\left|Z - 53,5\right| \geqslant 1,8\right) \leqslant \dfrac{0{,}722\,75}{1,8^2}$

En considérant l'évènement contraire, on a : $P\left(\left|Z - 53,5\right| < 1,8\right) > 1 - \dfrac{0{,}722\,75}{1,8^2}$.

$1 - \dfrac{0{,}722\,75}{1,8^2} \approx 0,777$

Donc la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

EXERCICE 2 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

$$\mathrm{A}(0\,;\,4\,;\,-1),\quad \mathrm{B}(6;\,1;\,5)\quad \text{et}\quad \mathrm{C}(6\,;\,-2\,;\,-1).$$

Affirmation 1 : Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$.

Or $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = 12-6-6 = 0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = 12-12+0 = 0$.
Or il est admis que les points A, B et C ne sont pas alignés, donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires.
Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : c'est un vecteur normal à ce plan : affirmation **Vraie**. **Affirmation 2 :**
On sait que :
$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{AB}) \iff \overrightarrow{\text{A}M} = u\overrightarrow{\text{AB}}$.
Avec $\overrightarrow{\text{A}M}\begin{pmatrix}x-0\\y-4\\z-(-1-\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$, vecteur qui est colinéaire à $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.
Donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{AB}) \iff \left\{\begin{array}{rcl}x-0&=&2u\\y-4&=&-u\\z-(-1)&=&2u\end{array}\right.$ où $u\in\mathbb{R}$. $\iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&2u\\y&=&4-u\\z&=&-1+2u\end{array}\right.$ où $\in\mathbb{R}$.
On pose $u=t+1$ et on obtient un autre système paramétrique :
$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{AB}) \iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&2t+2\\y&=&3-t\\z&=&2t+1\end{array}\right.$ où $t\in\mathbb{R}$.
L'affirmation est **Vraie**.

Affirmation 3 : Puisque $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite(AB) , le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ ou plus simplement le vecteur $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
On sait qu'alors $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{P} \iff 2x-y+2z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.
Comme $\text{C}(6\,;\,-2\,;\,-1)\in\mathscr{P} \iff 12+2-2+d=0 \iff 12+d=0 \iff d=-12$, on obtient finalement :
$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{P} \iff 2x-y+2z-12=0$: l'affirmation est **Fausse**.

$$\mathscr{D}\quad\left\{\begin{array}{rcl}x&=&3+t\\y&=&1+t\\z&=&2+t\end{array}\right.\text{ où } t\in\mathbb{R}\,;\quad \mathscr{D}'\quad\left\{\begin{array}{rcl}x&=&2t'\\y&=&4-t'\\z&=&-1+2t'\end{array}\right.\text{ où } t'\in\mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.
La droite $\mathscr{D}$ contient le point D(3; 1; 2) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et la droite $\mathscr{D}'$ contient le point E(0; 4; -1) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{d'}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{d}'$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.
Si elles ont point commun les coordonnées de celui-ci vérifient les deux systèmes d'où le nouveau système :
$\left\{\begin{array}{rcl}3+t&=&2t'\\1+t&=&4-t'\\2+t&=&-1+2t'\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}t&=&2t'-3\\t&=&3-t'\\t&=&-3+2t'\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl}2t'-3&=&3-t'\\3-t'&=&-3+2t'\end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{rcl}3t'&=&6\\6&=&3t'\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}t'&=&2\\2&=&t'\end{array}\right.$ et comme $t=3-t'=3-2=1$. Le système a une solution.
Conclusion : les droites sont sécantes au point de coordonnées $(4; 2; 3)$; elles sont coplanaires : l'affirmation 4 est **Fausse**

EXERCICE 3 **5 points**

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a.

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$

1. **a.** D'après la définition : pour tout entier naturel n
$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \iff u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n \iff u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.

b. *Méthode* 1 : d'après la définition : pour tout entier naturel n
$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \iff u_{n+1} = (u_n - 1)^2 - 1 + 2 \iff u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1 \iff u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 + 1 - u_n \iff u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 - 1(u_n - 1) \iff u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 1 - 1) \iff] \iff u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$

Méthode 2 : Soit $P_n = u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$; en posant $u_n = x$, on obtient
$P_n = x^2 - 3x + 2$: ce trinôme a deux racines (car $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 = 1$) :
$x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1$.
Donc $P_n = (x-1)(x-2) = (u_n - 1)(u_n - 2)$.

2. **a.** *Initialisation* : $u_0 = a$ et $1 < a < 2$, donc $u_0 < 2$: l'inégalité est vraie au rang 0 ;
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 2$.
$u_n < 2 \iff u_n - 2 < 0$ et on a admis que $u_n > 1 \iff u_n - 1 > 0$, donc d'après le **1 b.** $(u_n - 1)(u_n - 2) < 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n < 2$, d'où par transitivité : $u_{n+1} < 2$: l'inégalité est vraie au rang $n+1$.
Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$, donc par le principe de récurrence :
pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.

b. On a vu dans la question précédente que $1 < u_{n+1} < u_n < 2$ qui montre :

- que la suite (u_n) est décroissante ;
- que la suite (u_n) est minorée par 1.

La suite (u_n) est monotone décroissante et minorée par le 1 : elle converge donc vers un réel $\ell \geqslant 1$.
Par continuité de la fonction polynôme $x \longmapsto x^2 - 2x + 2$, la relation de récurrence donne à la limite en plus l'infini :

$$\ell = \ell^2 - 2\ell + 2 \iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} \ell - 1 & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ \ell - 2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \ell & = & 1 \\ & \text{ou} & \\ \ell & = & 2 \end{array}\right.$$

$\ell = 2$ n'est pas possible puisque (u_n) étant strictement décroissante :
$\ell < u_0 = a < 2$, d'où $\ell < 2$, donc $\ell = 1$.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$

1. u(2,1) renvoie 2 et u(2,2) renvoie 2

2. On peut conjecturer que la suite (u_n) est constante : $u_n = 2$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$

Partie C : étude dans le cas général

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.

   a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) = \ln\left[(u_n - 1)^2\right] = 2\ln(u_n - 1)$ car on sait que $u_n > 1 \iff u_n - 1 > 0$.

   Finalement : $v_{n+1} = 2\ln(u_n - 1) = 2v_n$.

   L'égalité $v_{n+1} = 2v_n$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 de premier terme $v_0 = \ln a - 1)$

   b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n = 2^n \ln(a - 1)$.

   On peut écrire $v_n = \ln(a-1)^{2^n} = \ln(u_n - 1)$ soit par croissance de la fonction logarithme népérien :

   $(a-1)^{2^n} = u_n - 1 \iff u_n = 1 + (a-1)^{2^n} = 1 + \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)}$.

2.

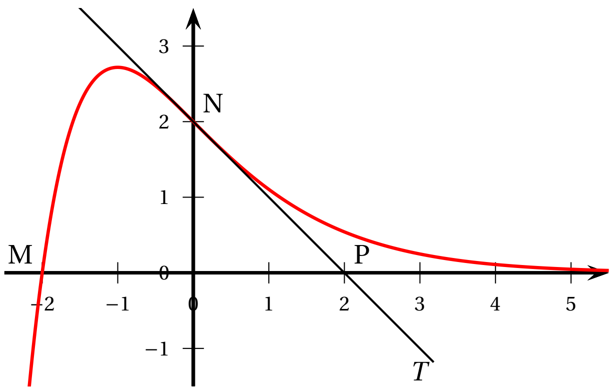
   - Si $1 < a < 2$, alors $0 < a - 1 < 1 \Rightarrow \ln(a-1) < 0$ (par croissance de la fonction logarithme népérien).

   On a donc $2^n \ln(a-1) < 0$ et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

   - Si $a = 2$, $\ln(a-1) = \ln 1 = 0$, donc $2^n \ln(a-1) = 0$ et $u_n = 1 + 1 = 2$. u est constante et on peut écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

   - Si $a > 2$, $a - 1 > 1$, donc $\ln(a-1) > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La suite est divergente.

Exercice 4 **6 points**



Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. **a.** On lit $f(0) = 2$.

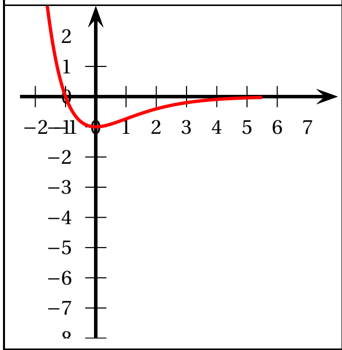
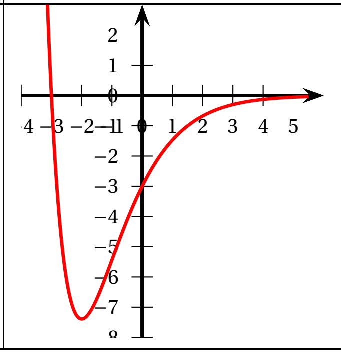
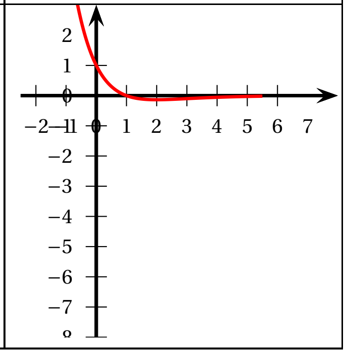
   b. Déterminer $f'(0)$. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la droite (NP) soit à $\dfrac{0-2}{2-0} = -1 = f'(0)$

2. Il semble que $f(-2) = 0$. $S = \{-2\}$.

3. Il semble que la fonction est convexe sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$: sur cet intervalle toutes les tangentes à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ sont sous cette courbe.

Toujours graphiquement sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ les coefficients directeurs des tangentes à la courbe (-1 et 0 au voisinage de plus l'infini) sont croissants : autrement dit la fonction f" est croissante donc $f''(x) \geqslant 0$

4.

Courbe 1	Courbe 2	Courbe 3
		

- On sait que $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$, donc une primitive sur le même intervalle est croissante ce qui élimine la courbe 3 ;
- Si F est une primitive de f et est représentée par la courbe 1, alors $F'(0) = 0 = f(0) = -1$: ceci est faux donc la courbe 1 est éliminée.

Il ne reste que la courbe 2.

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a, b et λ sont des constantes réelles.

1. On a vu que $f(0) = 2 \iff b\mathrm{e}^{\lambda\times 0} = 2 \iff b = 2$.

Donc $f(x) = (ax+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

2. On a donc $f(x) = (ax+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

On sait aussi que $f(-2) = 0 \iff (-2a+2)\mathrm{e}^{-2\lambda} = 0$ et comme $\mathrm{e}^{-2\lambda} \neq 0$ on a donc $-2a+2 = 0 \iff a = 1$.

Donc $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

3. On a vu que $f'(0) = -1$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda(x+2)\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x}(1+\lambda x+2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

Donc $f'(0) = -1 \iff 1+2\lambda = -1 \iff 2\lambda = -2 \iff \lambda = -1$.

On a donc finalement $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x+2 = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. Produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+2)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x-2) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$: le signe de $f('x)$ est donc celui de $-x-1$.

• $-x-1>0 \iff -1>x \iff x<-1$: sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[$ $f'(x)>0$: la fonction f est croissante sur cet intervalle ;

• $-x-1<0 \iff -1<x \iff x>-1$: sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ $f'(x)<0$: la fonction f est décroissante sur cet intervalle ;

• $-x-1=0 \iff -1=x$, $f'(1)=0$; $f(-1)=(-1+2)\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
Il reste à calculer la liite en plus l'infini : comme $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$.

Or on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ (puissances comparées) et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2\mathrm{e}^{-x} = 0$, d'où par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. **a.** f' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (x+1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x+1-1) = x\mathrm{e}^{-x}$.
Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de x, donc :

- f est convexe sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est concave sur $]-\infty\,;\,0]$;

b. – Donc d'après le résultat précédent la courbe $\mathscr{C}_f$ a un seul point d'inflexion de coordonnées $(0 ; 2)$.

4.

$$I(t) = \int_{-2}^{t} (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

a. On pose $u(x) = x+2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, d'où
$u'(x) = 1$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
Toutes ces fonctions étant continues car dérivables on peut intégrer par parties :
$I(t) = \left[-(x+2)\mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{t} + \displaystyle\int_{-2}^{t} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-(x+2)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{t} = \left[(-x-3)\mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{t} = (-t-3)\mathrm{e}^{-t} + 1\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2 - (t+3)\mathrm{e}^{-t}$.

b. f est positive sur l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$; on sait qu'alors l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-2$ et $x=t$ est égale à l'intégrale $I(t)$.
Or quand $t \to +\infty$, la surface n'est pas limitée à droite alors que l'intégrale l'est elle puisqu'on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} (t+3)\mathrm{e}^{-t} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} I(t) = \mathrm{e}^2$.