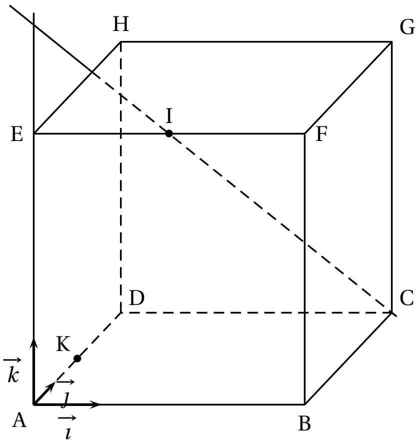
Corrigé du baccalauréat Métropole 19 juin 2024 J1 (secours)

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

On considère un repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel on place les points
B(4; 0; 0), D(0; 4; 0), E(0; 0; 4),
et les points C, F, G et H de sorte que le solide ABCDEFGH soit un cube.



1. De $\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}} = 4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$, on déduit que C(4; 4; 0);

De $\overrightarrow{\text{AF}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AE}} = 4\vec{\imath} + 4\vec{k}$, on déduit que F(4; 0; 4);

De $\overrightarrow{\text{AG}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AE}} = 4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, on déduit que G(4; 4; 4);

De $\overrightarrow{\text{AH}} = \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AE}} = 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, on déduit que H(0; 4; 4).

2. Le point I, milieu de [EF], a pour coordonnées $\left(\dfrac{0+4}{2}\,;\,\dfrac{0+0}{2}\,;\,\dfrac{4+4}{2}\right) = (2\,;\,0\,;\,4)$.

On sait que $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{IC}) \iff \overrightarrow{\text{I}M} = t\overrightarrow{\text{IC}}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Avec $\overrightarrow{\text{IC}}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$, on a donc :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{IC}) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-2 &=& 2t\\ y-0 &=& 4t\\ z-4 &=& -4t,\end{array}\right. \text{ avec } t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+2t\\ y &=& 4t\\ z &=& 4-4t\end{array}\right. \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de $\mathscr{P}$ avec (lC).

a. Le vecteur $\overrightarrow{\text{IC}}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. On sait qu'alors :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff 2x+4y-4z+d=0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\text{G}(4;4;4) \in \mathscr{P} \iff 2\times4+4\times4-4\times4+d=0 \iff d=-8$.

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathscr{P} \iff 2x+4y-4z-8=0 \iff x+2y-2z-4=0$.

b. J étant commun à (IC) et $\mathscr{P}$, ses coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient les équations paramétriques de (IC) et l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$, soit le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+2t\\ y & = & 4t\\ z & = & 4-4t\\ x+2y-2z-4 & = & 0\end{array}\right.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$2+2t+2\times 4t-2\times(4-4t)-4=0 \iff 2+2t+8t-8+8t-4=0$
$\iff 18t-10=0 \iff 9t-5=0 \iff t=\dfrac{5}{9}$.

En utilisant la représentation paramétrique de (IC), on obtient :

$x=2+2\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{18+10}{9}=\dfrac{28}{9}$; $y=4\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{20}{9}$ et $z=4-4\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{36-20}{9}=\dfrac{16}{9}$.

Donc C est la perpendiculaire (IC) au plan $\mathscr{P}$ qui coupe ce plan en J : J est donc le projeté orthogonal de C sur le plan, $\mathscr{P}$.

c. K(0 ; 2 ; 0) $\in \mathscr{P} \iff 0+2\times 2-2\times 0-4=0$: cette égalité est vraie

d. On vient de voir que K est un point de $\mathscr{P}$ et K est un point du plan de la base (ABCD) du cube.

D'autre part B(4 ; 0 ; 0) $\in \mathscr{P} \iff 4+2\times 0-2\times 0-4=0$, qui est vraie donc B est un point de $\mathscr{P}$ et bien sur de (ABC).

Conclusion : les deux points B et K sont communs aux deux plans, donc l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABC) est la droite (BK).

4. **a.** On prend comme base le triangle CBG de la face de droite BCGF : son aire est la moitié de celle du carré de côté 4, soit $\dfrac{4^2}{2}=8$.

La hauteur de la pyramide est alors [DC] avec DC = 4.

On a donc : $V_{\text{CBKG}}=\dfrac{8\times 4}{3}=\dfrac{32}{3}$.

b. En prenant pour la même pyramide la base BKG, la hauteur est [CJ].

Comme $\overrightarrow{\text{CJ}}\begin{pmatrix}4-\frac{28}{9}\\4-\frac{20}{9}\\\frac{16}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{9}\\\frac{16}{9}\\\frac{16}{9}\end{pmatrix}$, d'où :

$\text{CJ}^2=\|\overrightarrow{\text{CJ}}\|^2=\left(\dfrac{8}{9}\right)^2+\left(\dfrac{16}{9}\right)^2+\left(\dfrac{16}{9}\right)^2=\dfrac{64+256+256}{81}=\dfrac{576}{81}=\dfrac{9\times 64}{9\times 9}=\dfrac{64}{9}=\left(\dfrac{8}{3}\right)^2$.

Donc CJ $=\dfrac{8}{3}$.

Le volume de la pyramide est égal à :

$\dfrac{32}{3}=\dfrac{\text{aire(BKG)}\times\dfrac{8}{3}}{3} \iff \text{aire(BKG)}=32\times\dfrac{3}{8}=4\times 3=12.$

c. On a déjà vu que B est un point de $\mathscr{P}$ et G aussi par définition, donc la droite (BG) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

d. On note I$'$ un point de l'arête [EF], et $\mathscr{P}'$ le plan orthogonal à la droite (I$'$C) passant par G.

Le point I$'$ a pour coordonnées $(x~;~y~;~z)$ telles que $\overrightarrow{\text{EI}'}=k\overrightarrow{\text{EF}}$ avec $k\in[0~;~1]$.

Donc $\left\{\begin{array}{lcl} x-0 & = & (4-0)k\\ y-0 & = & (0-0)k\\ z-4 & = & (4-4)k\end{array}\right.$ et donc I$'\begin{pmatrix}4k\\0\\4\end{pmatrix}$; on a donc $\overrightarrow{\text{I}'\text{C}}\begin{pmatrix}4-4k\\4\\-4\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{BG}}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{I'C}} \cdot \overrightarrow{\text{BG}} = (4-4k)\times 0 + 4\times 4 + (-4)\times 4 = 0$ donc $\overrightarrow{\text{I'C}} \perp \overrightarrow{\text{BG}}$.

G appartient au plan $\mathscr{P}'$ qui est le plan orthogonal à (I′C) ; comme $\overrightarrow{\text{I'C}} \perp \overrightarrow{\text{BG}}$, on peut dire que B appartient aussi à $\mathscr{P}'$. Donc la droite (BG) est incluse dans $\mathscr{P}'$.

Exercice 2 **4 points**

Partie A

1. La variable aléatoire X suit d'après les conditions de l'énoncé une loi binomiale de paramètres $n = 10$ de probabilité $p = 0,25$.
2. On a $P(X \leqslant 3) \approx 0,775\,8$, d'où $P(X > 3) \approx 0,224\,2$ soit environ 0,224 au millième près.
3. $E(X) = n \times p = 10 \times 0,25 = 2,5$.
   Sur un grand nombre de tirages 25 clients sur 100 passeront moins de 12 minutes à la station.

Partie B

Un client arrive à la station et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.

On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.

On suppose que T_1, T_2 et T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.

On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. La variable aléatoire T_1 correspond au temps d'attente passé par le premier client à la station ; comme ce premier client n'a personne devant lui, la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station par le premier client est T_1.

   La variable aléatoire T_2 correspond au temps d'attente passé par le deuxième client à la station ; comme ce deuxième client avait le premier client devant lui, la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station par le deuxième client est $T_1 + T_2$.

   La variable aléatoire T_3 correspond au temps d'attente passé par le troisième client à la station ; comme ce troisième client avait deux autres clients devant lui, la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station par le troisième client est $T_1 + T_2 + T_3$.

   Donc $S = T_1 + T_2 + T_3$.
2. **a.** L'espérance est linéaire donc :
   $E(S) = E(T_1 + T_2 + T_3) = E(T_1) + E(T_2) + E(T_3) = 6 + 6 + 6 = 18$.

   Cela signifie que le temps moyen d'attente à la station d'un client qui a deux personnes devant lui est de 18 minutes.

   b. Les 3 variables aléatoires T_1, T_2 et T_2 sont indépendantes, donc on peut utiliser l'additivité de la variance :
   $V(S) = V(T_1 + T_2 + T_3) = V(T_1) + V(T_2) + V(T_3) = 1 + 1 + 1 = 3$.
3. La variable aléatoire S a pour espérance $E(S) = 18$ et pour variance $V(S) = 3$ donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

   pour tout $\delta \in \left]0\,;\,+\infty\right[$, $P\left(\left|S - E(S)\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{V(S)}{\delta^2}$, c'est-à-dire : $P\left(\left|S - 18\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{3}{\delta^2}$.

En prenant l'événement contraire, on a donc : $P\left(\left|S-18\right|<\delta\right)>1-\dfrac{3}{\delta^2}$.

La probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est : $P(14<S<22)$, soit : $P(18-4<S<18+4)$, ou encore : $P(-4<S-18<4)$, c'est-à-dire : $P\left(\left|S-18\right|<4\right)$.

En prenant $\delta=4$, on a donc; $P\left(\left|S-18\right|<4\right)>1-\dfrac{3}{16}$ donc $P\left(\left|S-18\right|<4\right)>0{,}8125$.

On en déduit que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

EXERCICE 3 **6 points**

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\ln\left(x^2+1\right)$,

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. **a.** En posant $u(x)=x^2+1$ et avec $u'(x)=2x$, on obtient :

   $\left[\ln(u)\right]'=\dfrac{u'}{u}$ donc $\left[\ln(x^2+1)\right]'=\dfrac{2x}{x^2+1}$, et donc :

   pour tout nombre réel x, $f'(x)=1-\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1-2x}{x^2+1}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$.

   b. Pour tout réel x, on a $x^2\geqslant 0$ donc $x^2+1\geqslant 1$ donc $x^2+1>0$.

   Comme $(x-1)^2\geqslant 0$ quel que soit $x\in\mathbb{R}$, on a par quotient $f'(x)\geqslant 0$: la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout nombre réel $x>0$n on a :

   $f(x)=x-\ln\left[x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=x-\ln(x^2)-\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=x-2\ln(x)-\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

3. On a :

   - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x^2}=1$, puis par composition $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\ln 1=0$.
   - $x-2\ln(x)=x\left(1-2\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

     On sait (puissances comparées) que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x-2\ln(x)=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$.

   Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 7\\ u_{n+1}=f(u_n) & = & u_n-\ln\left(u_n^2+1\right) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}\end{array}\right.$$

1. Soit la propriété « $u_n \geqslant 0$ ».

   Initialisation On a $u_0 = 7 \geqslant 0$: la propriété est vraie au rang 0;

   Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n \geqslant 0$: la fonction f étant croissante on a donc $u_n \geqslant 0 \Rightarrow f(u_n) \geqslant f(0)$; or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(0) = 0$, donc $u_{n+1} \geqslant 0$.

   Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $u_n \geqslant 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
2. De la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right)$ on déduit :

   $u_{n+1} - u_n = -\ln\left(u_n^2+1\right)$.

   $u_n^2 \geqslant 0 \Rightarrow u_n^2 + 1 \geqslant 1 \Rightarrow \ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant \ln(1)0$ par croissance de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}^*$.

   $\ln(1) = 0$ donc $\ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant 0$ et donc $-\ln\left(u_n^2+1\right) \leqslant 0$.

   On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \iff u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante.
3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par zéro; d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.
4. La fonction f est continue car dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc la relation de récurrence donne par limite en plus l'infini :

   $\ell = \ell - \ln\left(\ell^2+1\right) \iff \ln\left(\ell^2+1\right) = 0 \iff \ell^2 + 1 = 1 \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0$
5. **a.** On complète le script ci-dessous écrit en langage Python : afin qu'il

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la fonction ln
#Le Logarithme népérien

def seuil(h) :
  n = 0
  u = 7
  while u > h :
    n = n + 1
    u = u - ln(u**2+1)
  return n
```

   b. La calculatrice donne $u_{96} \approx 0,01003$ et $u_{97} \approx 0,0099$

   Le programme Python renverra la valeur 97; à partir du 98^e les termes seront inférieurs à un centième.

Partie C : calcul intégral

1. f est croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0)$.
   Or $f(0) = 0$ donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[0 ; +\infty[$.
2. Soit l'intégrale : $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   f étant positive sur $\mathbb{R}^+$ l'est sur l'intervalle $[2; 4]$, donc I est égale (en unités d'aire) à l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 2$ et $x = 4$.
3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2 ; 4]$, on a l'encadrement : $0,5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0,25x + 0,25$.

Sur l'intervalle $[2\,;\,4]$, l'intégration conserve l'ordre donc :

$$\begin{aligned}0{,}5x-1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x+0{,}25 &\Longrightarrow \int_2^4 (0{,}5x-1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 (0{,}25x+0{,}25)\,\mathrm{d}x\\ &\Longrightarrow \left[\frac{x^2}{4}-x\right]_2^4 \leqslant I \leqslant \left[\frac{x^2}{8}+0{,}25x\right]_2^4\\ &\Longrightarrow 4-4-(1-2) \leqslant I \leqslant 2+1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\\ &\Longrightarrow 1 \leqslant I \leqslant 2\end{aligned}$$

EXERCICE 4 **5 points**

1. On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

a. Affirmation 1 : « La droite d'équation $y=-2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f. »

La droite d'équation $y=-2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$ ou $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=-2$.

Or, d'après le tableau de variations de f, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=5$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

Affirmation 1 fausse

b. Affirmation 2 : « $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{f(x)-5}=+\infty$. »

D'après le tableau de variations de f, celle-ci est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-2[$, donc sur cet intervalle $f(x)<5$ et donc $f(x)-5<0$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=5$, on a donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)-5=0^-$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)-5}=-\infty$ et enfin $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{f(x)-5}=-\infty$.

Affirmation 2 fausse

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}$.

a. Affirmation 3 : « Le point $\mathrm{A}\left(2\,;\,\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g. »

La fonction g produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :

$g'(x)=\mathrm{e}^{-x}-x\,\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$, qui est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$g''(x)=-\,\mathrm{e}^{-x}-(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}(x-2)$.

On a $g''(x)=0 \iff \mathrm{e}^{-x}(x-2) \iff x-2=0$, puisque $\mathrm{e}^{-x}\neq 0$, quel que soit $x\in\mathbb{R}$, donc la dérivée seconde ne s'annule qu'en $x=2$.

Comme $g(2)=2\,\mathrm{e}^{-2}=\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$ et comme $g''(x)$ a le signe de $(x-2)$ et donc change de signe (de moins à plus) en 2, le point $\mathrm{A}\left(2\,;\,\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_g$.

Affirmation 3 vraie

b. Affirmation 4 : « Pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty\,;\,2[$, on a $g(x) \leqslant x$. »

$g(x) \leqslant x \iff x\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant x \iff x \leqslant x\,\mathrm{e}^{x} \iff 0 \leqslant x\,\mathrm{e}^{x} - x \iff x\,(\mathrm{e}^{x} - 1) \geqslant 0$

On établit un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		2
x		$-$	0	$+$	
$\mathrm{e}^{x} - 1$		$-$	0	$+$	
$x\,(\mathrm{e}^{x} - 1)$		$+$	0	$+$	

Donc, pour tout x de $]-\infty\,;\,2[$, on a $x\,(\mathrm{e}^{x} - 1) \geqslant 0$ donc $g(x) \leqslant x$.

Affirmation 4 vraie

3. Affirmation 5 : « L'équation $x\ln(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. »

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x) - 1$.

$x\ln(x) = 1 \iff x\ln(x) - 1 = 0 \iff f(x) = 0$

- La fonction f est dérivable et $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 0 = \ln(x) + 1$.
- $f'(x) > 0 \iff \ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $f(\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}^{-1}\ln(\mathrm{e}^{-1}) - 1 = -\mathrm{e}^{-1} - 1 < 0$

D'où le tableau de variation de f :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| -1	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1} - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

Sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}[$, la fonction f est négative, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

Sur l'intervalle $]\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty[$, la fonction f, continue et strictement croissante, passe du négatif au positif : d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.

Affirmation 5 fausse