# Corrigé du baccalauréat Amérique du Nord 21 mai 2024

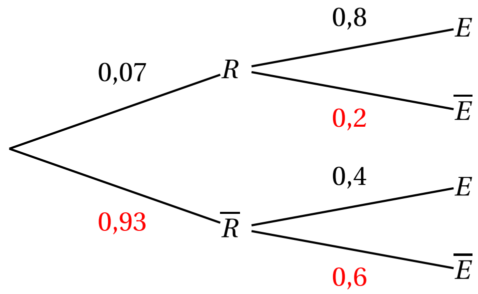
## Jour 1

## ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

### EXERCICE 1 — 5 points

#### Partie A

1. On dresse l'arbre pondéré de probabilités en utilisant les données de l'énoncé : $p(R) = 0,07$ ; $p_R(E) = 0,6$ et $p_{\overline{R}}(E) = 0,4$ :




On a $p(R \cap E) = p(R) \times p_R(E) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.

2. D'après la loi des probabilités totales : $p(E) = p(R \cap E) + p\left(\overline{R} \cap E\right)$.
Or $p\left(\overline{R} \cap E\right) = p\left(\overline{R}\right) \times p_{\overline{R}}(E) = 0,93 \times 0,4 = 0,372$.
Donc $p(E) = 0,056 + 0,372 = 0,428$.

3. On a $p_E(R) = \dfrac{p(E \cap R)}{p(E)} = \dfrac{p(R \cap E)}{p(E)} = \dfrac{0,056}{0,428} = \dfrac{56}{428} = \dfrac{14}{107} \approx 0,1308$ soit 0,131 au millième près.

#### Partie B

1. Les évènements étant indépendants et la probabilité d'obtenir un objet rare étant toujours égale à 0,07, la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,\ p)$ avec $n = 30$ et $p = 0,07$.

2. La calculatrice donne $P(X < 6) \approx 0,9837$ soit 0,984 au millième près.

3. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $p(X \geqslant k+1) = 1 - p(X \leqslant k)$. D'après la calculatrice : $p(X \geqslant 1+1) = 1 - p(X \leqslant 1) \approx 0,631$,
et $p(X \geqslant 2+1) = 1 - p(X \leqslant 2) \approx 0,351$, on a donc $k = 2$.

4. Il faut donc trouver $X$ tel que $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,95$ ou encore $1 - p(X = 0) \geqslant 0,95 \iff p(X = 0) \leqslant 1 - 0,95 \iff p(X = 0) \leqslant 0,05$.
Or $p(X = 0) = \binom{N}{0} \times 0,07^0 \times (1 - 0,07)^N = 0,93^N$.
Il faut donc résoudre l'inéquation :
$0,93^N \leqslant 0,05 \Rightarrow N \ln 0,93 \leqslant \ln 0,05$ par croissance de la fonction logarithme népérien et enfin $N \geqslant \dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,93}$, car $\ln 0,93 < 0$ et son inverse $\dfrac{1}{\ln 0,93}$ aussi.
D'après la calculatrice $\dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,93} \approx 41,3$.
Conclusion Il faut que $N \geqslant 42$.

## EXERCICE 2 — 5 points

1. On considère les points A(1 ; 0 ; 3) et B(4 ; 1 ; 0).
Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :
On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{AB}) \iff \overrightarrow{\text{A}M} = t\overrightarrow{\text{AB}},\ t \in \mathbb{R} \iff$
$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& 3t\\ y-0 &=& 1t\\ z-3 &=& -3t, \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+3t\\ y &=& t\\ z &=& 3-3t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$ Réponse **c.**
On considère la droite $(d)$ de représentation paramétrique
$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+4t\\ y &=& 6t\\ z &=& 1+t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$
2. Réponse **d**.
3. • Les deux droites ont pour vecteurs directeurs respectifs : $\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ : ces vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.
   • Les deux droites sont sécantes s'il existe deux réels $t$ et $k$ tels que :
   $\left\{\begin{array}{rcl} 3+4t &=& -2+3k\\ 6t &=& -1-2k\\ 4-2t &=& 1+k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 4t &=& 3k-5\\ 6t &=& -2t-1\\ -2t &=& k-3 \end{array}\right.$
   Par différence de la ligne 1 et de la ligne 2, on obtient$-2t = 5k-4 = k-3$ (ligne 3) soit $4k = 1 \iff k = \dfrac{1}{4}$, puis comme $-2t = k-3 = \dfrac{1}{4}-3 = -\dfrac{11}{4}$, d'où $t = \dfrac{11}{8}$, mais la première ligne donne $4t = 3k-5 = \dfrac{3}{4}-5 = -\dfrac{17}{4}$, d'où $t = \dfrac{17}{8}$ : ceci n'est pas possible : les deux droites ne sont pas sécantes.
   • Les deux droites ne sont pas confondues : réponse **b.**
4. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ vecteur directeur de $(d)$ est un vecteur normal au plan $(P)$ . On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (P) \iff \overrightarrow{\text{I}M}\cdot\overrightarrow{n} = 0 \iff 4(x-2)+6(y-1)-2(z-0) = 0 \iff 4x-8+6y-6-2z = 0 \iff 4x+6y-2z-14 = 0 \iff 2x+3y-z-7 = 0$ : réponse **a.**

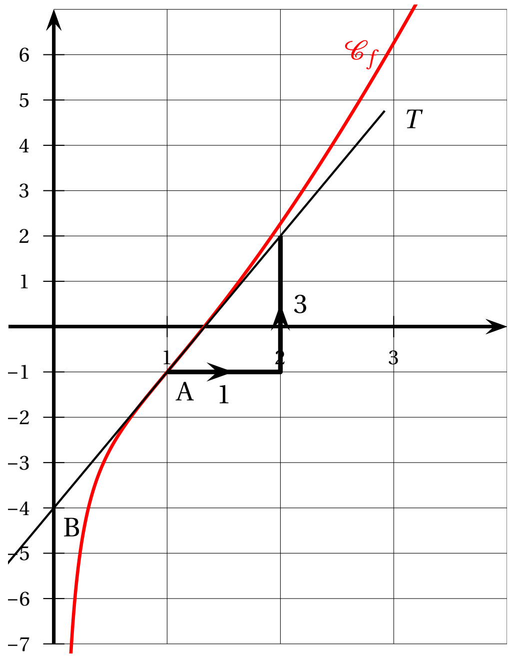
## EXERCICE 3 — 5 points

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction [ définie sur l'intervalle ]0 ; +∞[ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}.$$

**Partie A : lectures graphiques**

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction $f$, ainsi que la droite $(T)$, tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point A de coordonnées (1 ; −1).
Cette tangente passe également par le point B(0 ; −4).




1. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est le le nombre dérivé $f'(1)$ ; on lit sur le graphique $f'(1)\dfrac{3}{1}=3$.
L'ordonnée à l'origine est égale à $-4$, donc l'équation réduite de la tangente $(T)$ est

$$M(x\,;\,y)\in(T) \iff y=3x-4.$$

2. • il semble que $f$ est concave sur $]0;1[$;
• il semble que $f$ est convexe sur $]1\,;\,+\infty[$.
.Que semble représenter le point A pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$ ? Le point A semble être un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

**Partie B : étude analytique**

1.
• On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(x^2\right)=+\infty$; donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
• Avec $f(x)=2x\ln x-\dfrac{1}{x}$, on sait que $\displaystyle\lim_{x\to0}x\ln x=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=+\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=-\infty$ (l'axe des ordonnées est asymptote verticale de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de zéro.

2. On admet que la fonction $f$ est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   **a.** Les fonctions $x\longmapsto x$, $x\longmapsto\ln\left(x^2\right)$ et $x\longmapsto-\dfrac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et l'on a :
   $f'(x)=\ln\left(x^2\right)+x\times\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}=\ln\left(x^2\right)+2+\dfrac{1}{x^2}$ ou $f'(x)=2\ln x+2+\dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

   **b.** En dérivant $f'(x)$ on obtient :
   $f''(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2x}{x^4}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^3}\dfrac{2x^2-2}{x^3}=\dfrac{2\left(x^2-1\right)}{x^3}=\dfrac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$.

**3.** **a.** Comme $x^3 > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$, le signe de $f''(x)$ est celui de $(x+1)(x-1)$ et comme $x+1 > 1 >$, le signe de $f''(x)$ est celui de $x-1$.

Conclusion :

- Sur $]0\,;\,1[$, $x < 1$, $f''(x) < 0$ : la fonction est concave;
- Sur $]1\,;\,+\infty[$, $x > 1$, $f''(x) > 0$ : la fonction est convexe;
- pour $x = 1$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe : le point A est le point d'inflexion de $(\mathscr{C}_f)$.

**b.** Du signe de $f''(x)$ on en déduit les variations de $f'$ qui est décroissante sur $]0;1[$ puis croissante sur $[1\,;\,+\infty[$, donc $f'(1) = 2+1 = 3$ (vu à la question **1.**).
Comme 3 est le minimum de $f'$, on en déduit que $f'(x) > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et par conséquent la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

**4.** **a.** Tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $f'(x)$ | ‖ | ↘ | $3$ | ↗ | | |
| $f$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↗ | $\approx 2,27$ | $+\infty$ |

Sur l'intervalle $]1;2[$ la fonction $f$ est continue (car dérivable) et strictement croissante avec $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$ : d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un nombre unique $\alpha \in ]1\,;\,2[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

**b.** La calculatrice donne $f(1,3) \approx -0,09$ et $f(1,4) \approx 0,23$ donc $1,3 < \alpha < 1,4$, puis $f(1,32) \approx -0,02$ et $f(1,33) \approx 0,007$, d'où $1,32 < \alpha < 1,33$ et enfin
$f(1,327) \approx -0,003$ et $f(1,328) \approx 0,0004$, donc $\alpha \approx 1,33$ au centième près.

On sait que $\alpha$ est solution de $f(x) = 0 \iff x\ln\left(x^2\right) - \dfrac{1}{x} = 0 \iff$
$x\ln\left(x^2\right) = \dfrac{1}{x} \iff \ln\left(x^2\right) = \dfrac{1}{x^2}$ et enfin par croissance de la fonction exponentielle :
$\exp\left(\ln\left(x^2\right)\right) = \exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \iff x^2 = \exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
$\alpha$ vérifie cette équation donc $\alpha^2 = \exp\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

## EXERCICE 4 **6 points**

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

**1.** $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi} 1 \times \sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1+1 = 2.$

**2.** **a.** On sait que $0 \leqslant x \leqslant \pi \Rightarrow 0 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$ par produit par $\mathrm{e}^{-nx} > 0$ : la fonction à intégrer étant positive et l'intervalle d'intégration étant croissant on sait que l'intégrale de cette fonction positive est positive. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.

**b.** Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(nx)}\sin(x)\,\mathrm{d}x =$

$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\left[\mathrm{e}^{-(n+1)x} - \mathrm{e}^{-(nx)}\right]\,\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale, puis

$I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\mathrm{e}^{-(nx)}\left[\mathrm{e}^{-x} - 1\right]\,\mathrm{d}x.$

Soit $u$ la fonction définie sur $[0~;~\pi]$ par $u(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$.

$u$ est dérivable sur $[0~;~\pi]$ et sur cet intervalle $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$. La fonction $u$ est donc décroissante de $\mathrm{e}^{-0} - 1 = 0$ à $\mathrm{e}^{-\pi}1 \approx -0,957$.

Comme $\sin x\mathrm{e}^{-(nx)} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0$, la fonction à intégrer dans $I_{n+1} - I_n$ est négative et donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

**c.** On vient de démontrer que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0 \iff I_{n+1} \leqslant I_n$, c'est-à-dire que la suite $(I_n)$ est décroissante ; étant minorée par zéro elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 0$.

**3.** **a.** On a déjà vu que que $0 \leqslant x \leqslant \pi \Rightarrow 0 \leqslant \sin x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$, donc par intégration sur l'intervalle $[0~;~+\pi]$ on obtient

$\displaystyle\int_0^{\pi} 0\,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-n\pi}\,\mathrm{d}x.$

$$I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

**b.** Une primitive de $\mathrm{e}^{-nx}$ est $\dfrac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}$, donc pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^{\pi} =$ $-\dfrac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{-n\pi} - \mathrm{e}^{0}\right] = -\dfrac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{-n\pi} - 1\right] = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$.

**c.** On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-n\pi} = 1$ et enfin $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n} = 0$.

D'après le théorème des « gendarmes » la suite $(I_n)$ a pour limite 0.

**4.** **a.** • IPP1 On pose :

$u(x) = \mathrm{e}^{-nx} \qquad v'(x) = \sin x$
$u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx} \qquad v(x) = -\cos x$

On a donc $I_n = \left[-\mathrm{e}^{-nx}\cos x\right]_0^{\pi} - \displaystyle\int_0^{\pi} n\mathrm{e}^{-nx}\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-n\pi} + 1 - nJ_n =$ $1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n$.

• IPP2 On pose :

$u(x) = \sin x \qquad v'(x) = \mathrm{e}^{-nx}$
$u'(x) = \cos x \qquad v(x) = \dfrac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}$

On a donc $I_n = \left[\dfrac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}\sin x\right]_0^{\pi} - \displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\frac{1}{-n}\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos x\mathrm{d}x =$ $\dfrac{1}{n}J_n$.

**b.** En égalant les deux valeurs de $I_n$ trouvées on obtient :

$1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n = \dfrac{1}{n}J_n \iff 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} = J_n\left(n + \dfrac{1}{n}\right)$

$\iff J_n\left(\dfrac{n^2+1}{n}\right) = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} \iff J_n = \dfrac{n}{n^2+1} \times \left[1 + \mathrm{e}^{-n\pi}\right]$.

En, reportant dans l'expression $I_n = \dfrac{1}{n}J_n$, on obtient finalement :

$$I_n = \frac{1}{n} \times \frac{n}{n^2+1} \times \left[1 + \mathrm{e}^{-n\pi}\right] = \frac{1 + \mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}.$$

**5.** On souhaite obtenir le rang $n$ à partir duquel la suite $(I_n)$ devient inférieure à 0,1.
Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1  from math import *
2  def seuil() :
3     n = 0
4     I = 2
5     while I >= 0.1 :
6           n=n+1
7           I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8  return n
```