∽ Baccalauréat Asie 24 mars 2023 ∾

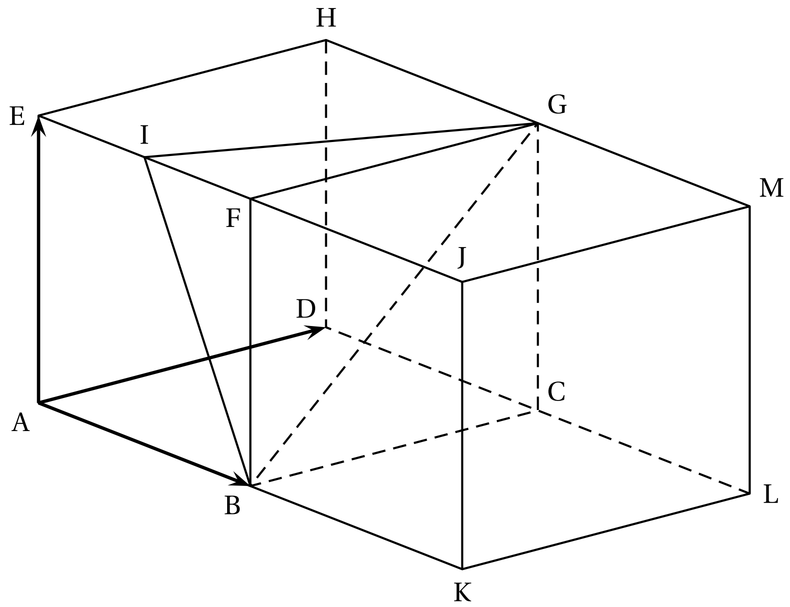
Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

On considère deux cubes ABCDEFGH et BKLCFJMG positionnés comme sur la figure suivante :



Le point I est le milieu de [EF].
Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.
Ainsi, par exemple, les points F, G et J ont pour coordonnées

$$F(1\,;0\,;1),\qquad G(1\,;1\,;1)\quad \text{et}\quad J(2\,;0\,;1).$$

1. Montrer que le volume du tétraèdre FIGB est égal à $\dfrac{1}{12}$ d'unité de volume.

   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante.}$$

2. Déterminer les coordonnées du point I.

3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ un vecteur normal au plan (BIG).

4. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BIG) est $2x - y + z - 2 = 0$.

5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, orthogonale à (BIG) et passant par F.

6. **a.** La droite d coupe le plan (BIG) au point L′.

   Montrer que les coordonnées du point L′ sont $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{6}\,;\,\dfrac{5}{6}\right)$.

b. Calculer la longueur FL$'$.

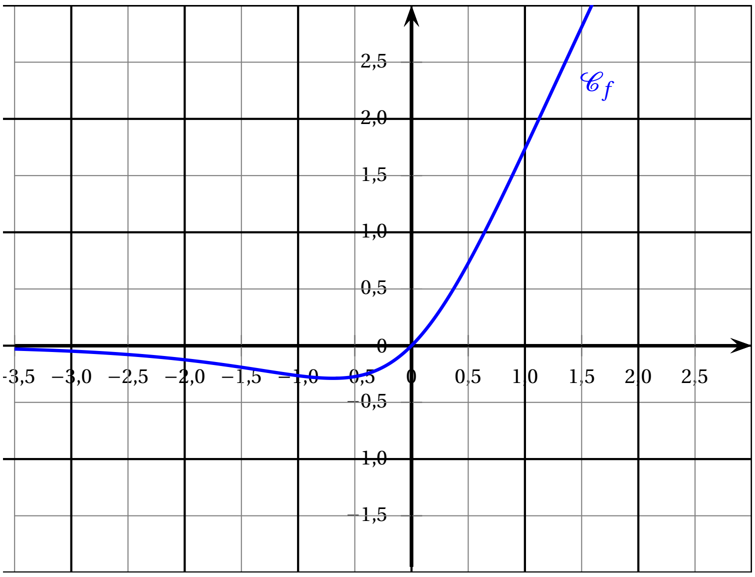
c. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle IGB.

EXERCICE 2 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative représentée ci-dessous.



Un élève formule les conjectures suivantes à partir de cette représentation graphique :

1. L'équation $f(x) = 2$ semble admettre au moins une solution.

2. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f semble être croissante est $[-0,5\ ;\ +\infty[$.

3. L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ semble être : $y = 1,5x$.

Le but de cet exercice est de valider ou rejeter les conjectures concernant la fonction f.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par

$$g(x) = e^{2x} - e^{x} + 1.$$

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

3. Montrer que $g'(x) = e^{x}\left(2e^{x} - 1\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Dresser le tableau des variations de la fonction g en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a, ainsi que les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

5. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

6. Sans en mener nécessairement les calculs, expliquer comment on pourrait établir le résultat de la question 5 en posant $X = e^{x}$.

Partie B

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction dérivée de la fonction f est notée f'.

   Justifier que $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[-\ln(2)\ ;\ +\infty[$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-\ln(2)\ ;\ +\infty[$ et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie C

À l'aide des résultats de la partie B, indiquer, pour chaque conjecture de l'élève, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

EXERCICE 3 **4 points**

*Marie Sklodowska-Curie (*1867 – 1934*) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française.*
Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 *et un en Chimie en* 1911 *pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.*

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.
Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.
On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.
On admet que, au bout de 24 heures, 0,5 % des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.
On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.
Pour $n \geqslant 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1. **a.** Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$.

   b. Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n, on a

   $$v_{n+1} = 0,995 v_n + 1,5 \times 10^{19}.$$
2. **a.** Démontrer, par récurrence sur n, que $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.

   b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par :

   $$u_n = v_n - 3 \times 10^{21}.$$

   a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 0,995.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n = 3 \times 10^{21}\,(0,995^n + 1)$.

   c. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de jours le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4,5 \times 10^{21}$. Justifier la réponse.

5. On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour cela, on utilise une fonction appelée noyaux programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

```
1  def noyaux (n) :
2      V =6*10**21
3      L=[V]
4      for k in range (n) :
5          V= ...
6          L.append(V)
7      return L
```

a. À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter la ligne 5 de la fonction noyaux afin qu'elle réponde au problème.

b. Pour quelle valeur de l'entier n la commande noyaux(n) renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude ?

EXERCICE 4 — 5 points

Pour chacune des cinq questions de cet exercice, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

On considère L une liste de nombres constituée de termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 7 et de raison 3, le dernier nombre de la liste est 2 023 soit :

$$L = [7, 10, \ldots, 2\,023].$$

Question 1 : Le nombre de termes de cette liste est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
2 023	673	672	2 016

Question 2 : On choisit au hasard un nombre dans cette liste. La probabilité de tirer un nombre pair est :

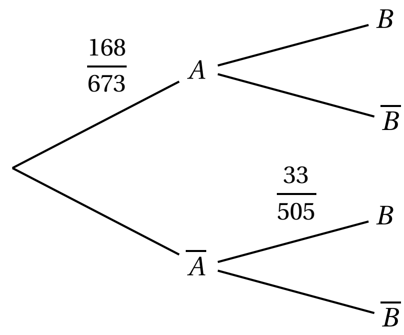
Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{1}{2}$	$\frac{34}{673}$	$\frac{336}{673}$	$\frac{337}{673}$

On rappelle qu'on choisit au hasard un nombre dans cette liste.
On s'intéresse aux évènements suivants :

- Évènement A : « obtenir un multiple de 4 »

- Évènement B : « obtenir un nombre dont le chiffre des unités est 6 »

Pour répondre aux questions suivantes on pourra utiliser l'arbre pondéré ci-dessous et on donne $p(A \cap B) = \dfrac{34}{673}$.



Question 3 :
La probabilité d'obtenir un multiple de 4 ayant 6 comme chiffre des unités est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{168}{673} \times \dfrac{34}{673}$	$\dfrac{34}{673}$	$\dfrac{17}{84}$	$\dfrac{168}{34}$

Question 4 : $P_B(A)$ est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{36}{168}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{33}{168}$	$\dfrac{34}{67}$

Question 5 : On choisit, au hasard, successivement, 10 éléments de cette liste.
Un élément peut être choisi plusieurs fois. La probabilité qu'aucun de ces 10 nombres ne soit un multiple de 4 est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\left(\dfrac{505}{673}\right)^{10}$	$1 - \left(\dfrac{505}{673}\right)^{10}$	$\left(\dfrac{168}{673}\right)^{10}$	$1 - \left(\dfrac{168}{673}\right)^{10}$