Baccalauréat spécialité Jour 2
Métropole Antilles-Guyane 9 septembre 2022

Exercice 1 7 points **Thèmes : probabilités**

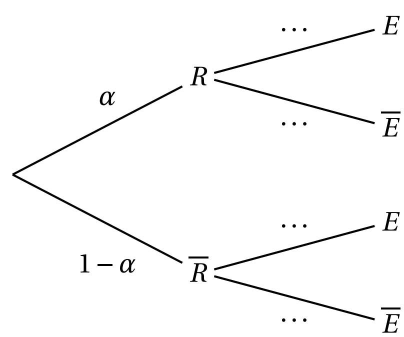
Dans le magasin d'Hugo, les clients peuvent louer deux types de vélos : vélos de route ou bien vélos tout terrain.
Chaque type de vélo peut être loué dans sa version électrique ou non.
On choisit un client du magasin au hasard, et on admet que :

- Si le client loue un vélo de route, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,4 ;
- Si le client loue un vélo tout terrain, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,7 ;
- La probabilité que le client loue un vélo électrique est de 0,58.

On appelle α la probabilité que le client loue un vélo de route, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
On considère les évènements suivants :

- R : « le client loue un vélo de route » ;
- E : « le client loue un vélo électrique » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$, évènements contraires de R et E.

On modélise cette situation aléatoire à l'aide de l'arbre reproduit ci-contre :
Si F désigne un évènement quelconque, on notera $p(F)$ la probabilité de F.



1. Recopier cet arbre sur la copie et le compléter.
2. **a.** Montrer que $p(E) = 0{,}7 - 0{,}3\alpha$.

   b. En déduire que : $\alpha = 0{,}4$.
3. On sait que le client a loué un vélo électrique.

   Déterminer la probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain. On donnera le résultat arrondi au centième.
4. Quelle est la probabilité que le client loue un vélo tout terrain électrique ?
5. Le prix de la location à la journée d'un vélo de route non électrique est de 25 euros, celui d'un vélo tout terrain non électrique de 35 euros.

   Pour chaque type de vélo, le choix de la version électrique augmente le prix de location à la journée de 15 euros.

   On appelle X la variable aléatoire modélisant le prix de location d'un vélo à la journée.

a. Donner la loi de probabilité de X. On présentera les résultats sous forme d'un tableau.

b. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

6. Lorsqu'on choisit 30 clients d'Hugo au hasard, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

On note Y la variable aléatoire associant à un échantillon de 30 clients choisis au hasard le nombre de clients qui louent un vélo électrique.

On rappelle que la probabilité de l'événement E est : $p(E) = 0{,}58$.

a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne exactement 20 clients qui louent un vélo électrique. On donnera le résultat arrondi au millième.

c. Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique. On donnera le résultat arrondi au millième.

Exercice 2 7 points **Thèmes : suites, fonctions**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (a_n) et (b_n) définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 1$ et $b_n = a_n - 2$.

On peut affirmer que :

a. (a_n) est arithmétique ; **b.** (b_n) est géométrique ;

c. (a_n) est géométrique ; **d.** (b_n) est arithmétique.

Dans les questions 2. et 3., on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 2,\ v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n : \left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n + 3v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + v_n. \end{array}\right.$$

2. On peut affirmer que :

a. $\left\{\begin{array}{rcl} u_2 & = & 5 \\ v_2 & = & 3 \end{array}\right.$ **b.** $u_2^2 - 3v_2^2 = -2^2$ **c.** $\dfrac{u_2}{v_2} = 1{,}75$ **d.** $5u_1 = 3v_1$.

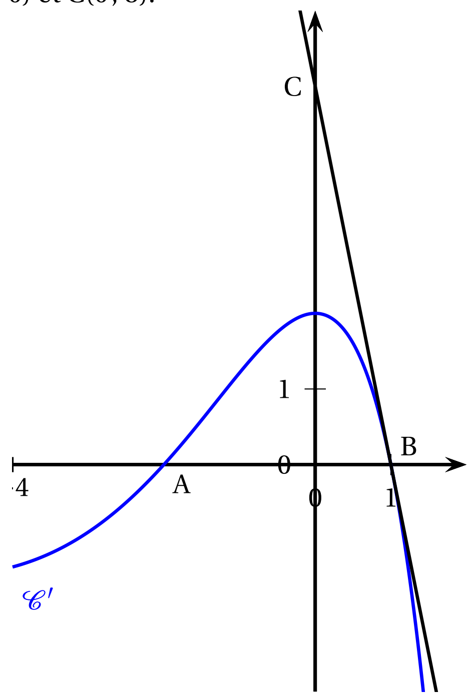
3. On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python :

```
def valeurs() :
  u = 2
  v = 1
  for k in range(1,11)
    c = u
    u = u + 3*v
    v = c + v
  return (u, v)
```

Ce programme renvoie :

a. u_{11} et v_{11} ; **b.** u_{10} et v_{11} ; **c.** les valeurs de u_n et v_n pour n allant de 1 à 10 ; **d.** u_0 et v_{10}.

Pour les questions 4. et 5., on considère une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,2]$. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la dérivée seconde de f.
On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de la fonction dérivée f' dans un repère du plan. On donne de plus les points A$(-2\,;\,0)$, B$(1\,;\,0)$ et C$(0\,;\,5)$.



4. La fonction f est :

a. concave sur $[-2\,;\,1]$; **b.** convexe sur $[-4\,;\,0]$;
c. convexe sur $[-2\,;\,1]$; **d.** convexe sur $[0\,;\,2]$.

5. On admet que la droite (BC) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}'$ au point B. On a :

a. $f'(1) < 0$; **b.** $f'(1) = 5$;
c. $f''(1) > 0$; **d.** $f''(1) = -5$.

6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x$.
La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$ est définie par :

a. $F(x) = \left(x^2-2x+3\right)\mathrm{e}^x$; **b.** $F(x) = \left(x^2-2x+3\right)\mathrm{e}^x - 2$;
c. $F(x) = \left(\dfrac{1}{3}x^3+x\right)\mathrm{e}^x + 1$; **d.** $F(x) = \left(\dfrac{1}{3}x^3+x\right)\mathrm{e}^x$.

Exercice 3 7 points **Thèmes : fonction logarithme, suites**

Les parties B et C sont indépendantes

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - x\ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = -\ln x$.
   b. En déduire les variations de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0~;~+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0{,}5 \\ u_{n+1} & = & u_n - u_n \ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0{,}5~;~1]$.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0{,}5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
2. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   b. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x\ln x.$$

1. Pour tout nombre réel k, montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = \mathrm{e}^{k-1}$.
2. Vérifier que, pour tout nombre réel k, on a : $x_k = y_k$.

Exercice 4 7 points **Thèmes : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$, on considère :

- la droite $\mathcal{D}$ passant par le point A$(2~;~4~;~0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$;
- la droite $\mathcal{D}'$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3 \\ y & = & 3+t \\ z & = & 3+t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$ de la droite $\mathcal{D}'$.
   b. Montrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}$, et M$'$ le point d'intersection de Δ et $\mathscr{D}'$.
On se propose de déterminer la distance MM$'$ appelée « distance entre les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ».

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

3. On note $\mathscr{P}$ le plan contenant les droites $\mathscr{D}$ et Δ, c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b. En déduire qu'une équation du plan $\mathscr{P}$ est : $2x - y - 5z = 0$.

c. On rappelle que M$'$ est le point d'intersection des droites Δ et $\mathscr{D}'$.
Justifier que M$'$ est également le point d'intersection de $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.
En déduire que les coordonnées du point M$'$ sont $(3\,;\,1\,;\,1)$.

4. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. Justifier que le point M a pour coordonnées $(1\,;\,2\,;\,0)$.

c. Calculer la distance MM$'$.

5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 5t\\ y &=& 2+5t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la droite d est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan $\mathscr{P}$.
Exprimer le volume du tétraèdre ANMM$'$ en fonction de ℓ.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

c. Justifier que, si N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d, les tétraèdres $\mathrm{AN_1MM'}$ et $\mathrm{AN_2MM'}$ ont le même volume.