∽ CORRIGÉ BACCALAURÉAT GÉNÉRAL ∾

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Session 2021 Sujet 0

EXERCICE 1 **commun à tous les candidats** **5 points**

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
$\boxed{\textbf{b. } \text{La suite } (w_n) \text{ converge vers } 1.}$
c. La suite (u_n) est minorée par 1.
d. La suite (w_n) est croissante.

> Application directe du théorème dit « des gendarmes ».

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$
b. $f'(x) = (1+2x)\,\mathrm{e}^{x^2}$
$\boxed{\textbf{c. } f'(x) = (1+2x^2)\,\mathrm{e}^{x^2}}$
d. $f'(x) = (2+x^2)\,\mathrm{e}^{x^2}$.

> $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x^2} + x \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2} = \left(1+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}$

3. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?

a. -1 **b.** 0 $\boxed{\textbf{c. } \frac{1}{2}}$ **d.** $+\infty$.

> $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

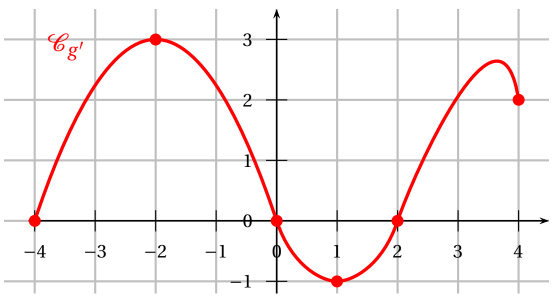
On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$.
b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
$\boxed{\textbf{c. } \text{Il existe au moins un nombre réel } a \text{ dans l'intervalle } [0;\,1] \text{ tel que } h(a) = 1.}$
d. l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

> Application du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa **fonction dérivée** g'.
On peut affirmer que :

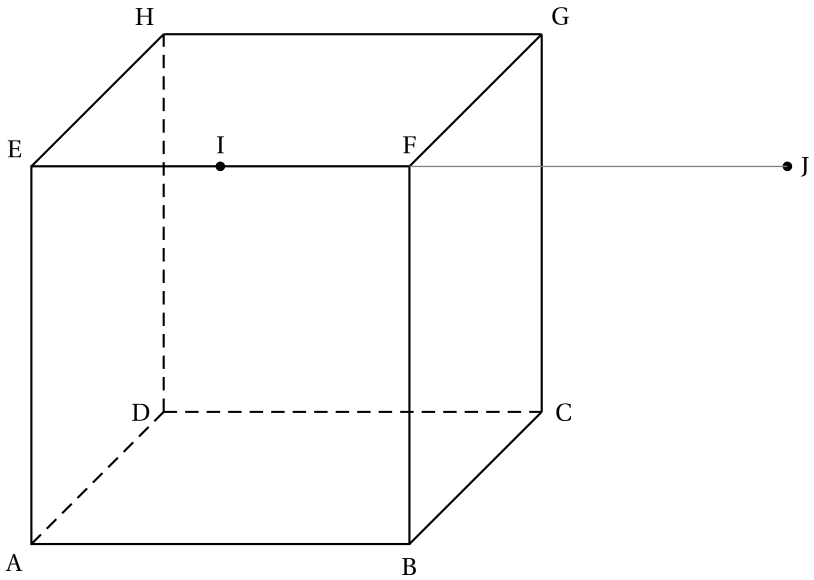
a. g admet un maximum en -2.
b. g est croissante sur l'intervalle $[1\,;2]$.
$\boxed{\textbf{c. } g \text{ est convexe sur l'intervalle } [1\,;2].}$
d. g admet un minimum en 0.



> La fonction g' est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$, donc la fonction g est convexe sur cet intervalle.

EXERCICE 2 **commun à tous les candidats** **5 points**

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

Les sommets du cube ont pour coordonnées : A $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, D $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, E $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, F $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, H $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et G $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. **a.**
- Le point I est le milieu de [EF] donc I a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$.
- Le point J est le symétrique de E par rapport à F, donc J a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$.

b. On en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

c.
- Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (BGI).
- $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = -1+0+1 = 0$ donc $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BI}$.
- $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = 0-1+1 = 0$ donc $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BG}$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI), donc il est normal au plan (BGI).

d.
- Le vecteur $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (BGI) donc le plan (BGI) a une équation de la forme $2x-y+z+d=0$.
- Le point B appartient au plan (BGI) donc les coordonnées de B vérifient l'équation du plan ; donc $2x_B - y_B + z_B + d = 0$, ce qui équivaut à $2-0+0+d=0$, ce qui veut dire que $d=-2$.

Donc une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x-y+z-2=0$.

2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

a. La droite d est orthogonale au plan (BGI), et $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI), donc $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur directeur de la droite d.

Le point F appartient à la droite d donc la droite d est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{DJ}$ soient colinéaires.

$\overrightarrow{\text{FM}}$ et $\overrightarrow{\text{DJ}}$ colinéaires $\iff \overrightarrow{\text{FM}} = t.\overrightarrow{\text{DJ}} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& t\times 2\\ y-0 &=& t\times(-1)\\ z-1 &=& t\times 1\end{array}\right.$

Donc la droite d a pour équation $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y &=& \quad -t\\ z &=& 1+\ \ t\end{array}\right., t\in\mathbb{R}$

b. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ \frac{5}{6}\right)$.

- Pour prouver que L $\in d$, on cherche t pour que $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{2}{3} &=& 1+2t\\ \frac{1}{6} &=& \quad -t\\ \frac{5}{6} &=& 1+\ \ t\end{array}\right.$

  On trouve $t = -\dfrac{1}{6}$ donc L $\in d$.

- Le plan (BGI) a pour équation $2x-y+z-2=0$; or $2x_{\text{L}}-y_{\text{L}}+z_{\text{L}}-2 = \dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{6}-2=0$, donc L $\in$ (BGI).

Le point L est donc le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).

3. a. La pyramide FBGI a pour base le triangle rectangle FBG, et pour hauteur IF.

- IF $= \dfrac{1}{2}$
- Le triangle rectangle FBG a pour aire $\dfrac{\text{FG}\times\text{FB}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Le volume de la pyramide FBGI est donc $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$.

b. La droite d est orthogonale au plan (BGI) et coupe ce plan en L. Le point F appartient à la droite d, donc on peut dire que la distance FL est la distance du point F au plan (BGI), autrement dit c'est la hauteur de la pyramide FBGI dont le triangle BGI est la base.

$\text{FL}^2 = \left(\dfrac{2}{3}-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{6}-0\right)^2+\left(\dfrac{5}{6}-1\right)^2 = \dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$ donc $\text{FL} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

On appelle $\mathcal{A}$ l'aire du triangle BGI. On exprime le volume de la pyramide FBGI :

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\times\text{FL}\times\mathcal{A} \iff \dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{6}}\times\mathcal{A} \iff \dfrac{3\times\sqrt{6}}{12}=\mathcal{A} \iff \mathcal{A}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

L'aire du triangle BGI est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

EXERCICE 3 — commun à tous les candidats — 5 points

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

— la formation avec *conduite accompagnée* ;
— la formation *traditionnelle*.

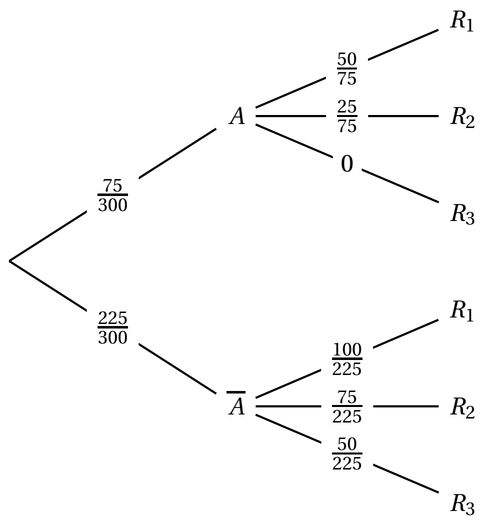
On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

— 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée* ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.
— 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation *traditionnelle* ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.

On considère les évènements suivants :
A : « la personne a suivi une formation avec *conduite accompagnée* » ;
R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;
R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;
R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. On modélise la situation par un arbre pondéré.



2. **a.** La probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation est :
$P(A \cap R_2) = P(A) \times P_A(R_2) = \frac{75}{300} \times \frac{25}{75} = \frac{25}{300} = \frac{1}{12}$.

b. La probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $P(R_2)$..
D'après la formule des probabilités totales :
$P(R_2) = P(A \cap R_2) + P\left(\overline{A} \cap R_2\right) = \dfrac{25}{300} + \dfrac{125}{300} \times \dfrac{75}{125} = \dfrac{25}{300} + \dfrac{75}{300} = \dfrac{100}{300} = \dfrac{1}{3}$.

c. La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. La probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* est :
$P_{R_2}(A) = \dfrac{P(A \cap R_2)}{P(R_2)} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.
Ainsi, $X = 1$ correspond à l'évènement R_1.

a. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	1	2	3
$p_i = P(X = x_i)$	$P(R_1)$	$P(R_2)$	$P(R_3)$

- $P(R_1) = P(A \cap R_1) + P\left(\overline{A} \cap R_1\right) = \dfrac{75}{300} \times \dfrac{50}{75} + \dfrac{225}{300} \times \dfrac{100}{225} = \dfrac{50}{300} + \dfrac{100}{300} = \dfrac{150}{300} = \dfrac{1}{2}$
- $P(R_2) = \dfrac{1}{3}$
- $P(R_3) = P(A \cap R_3) + P\left(\overline{A} \cap R_3\right) = 0 + \dfrac{225}{300} \times \dfrac{50}{225} = \dfrac{50}{300} = \dfrac{1}{6}$

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	1	2	3
$p_i = P(X = x_i)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$

b. L'espérance de cette variable aléatoire est : $E(X) = \sum(x_i \times p_i) = 1 \times \dfrac{1}{2} + 2 \times \dfrac{1}{3} + 3 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{3} \approx 1,67$.
Cela veut dire que le nombre de passages pour réussir l'examen est en moyenne de $1,67$.

4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.
On admet que la probabilité de l'évènement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.

a. On cherche un évènement dont la probabilité est égale à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
$P(R_3) = \frac{1}{6}$ donc $P\left(\overline{R_3}\right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Le nombre $\frac{5}{6}$ est donc la probabilité de l'événement « R_1 ou R_2 », c'est-à-dire la probabilité qu'une personne prise au hasard réussisse l'examen à la première tentative ou à la deuxième.

La probabilité que n personnes réussissent l'examen à la première ou à la deuxième tentative est de $\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

L'événement de probabilité $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ est l'événement contraire du précédent, donc correspond à l'événement « au moins une personne n'a pas réussi l'examen à la première ou à la deuxième tentative », c'est-à-dire « au moins une personne a réussi l'examen à la troisième tentative ».

On considère la fonction Python **seuil** ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$.

```
def seuil(p) :
    n = 1
    while 1-(5/6)**n <= p :
        n = n+1
    return n
```

b. La valeur renvoyée par **seuil**(0.9) est la première valeur de n pour laquelle $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9$.
On résout cette inéquation :

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9 \iff 0,1 > \left(\frac{5}{6}\right)^n \iff \ln(0,1) > \ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \iff \ln(0,1) > n\ln\left(\frac{5}{6}\right) \iff \frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} < n$$

$\dfrac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 12,6$ donc la commande **seuil**(0.9) renvoie la valeur 13.

Il faut donc prendre $n = 13$ personnes sur les 300 pour que la probabilité d'en avoir une qui a réussi l'examen à sa troisième tentative soit supérieure à $0,9$.

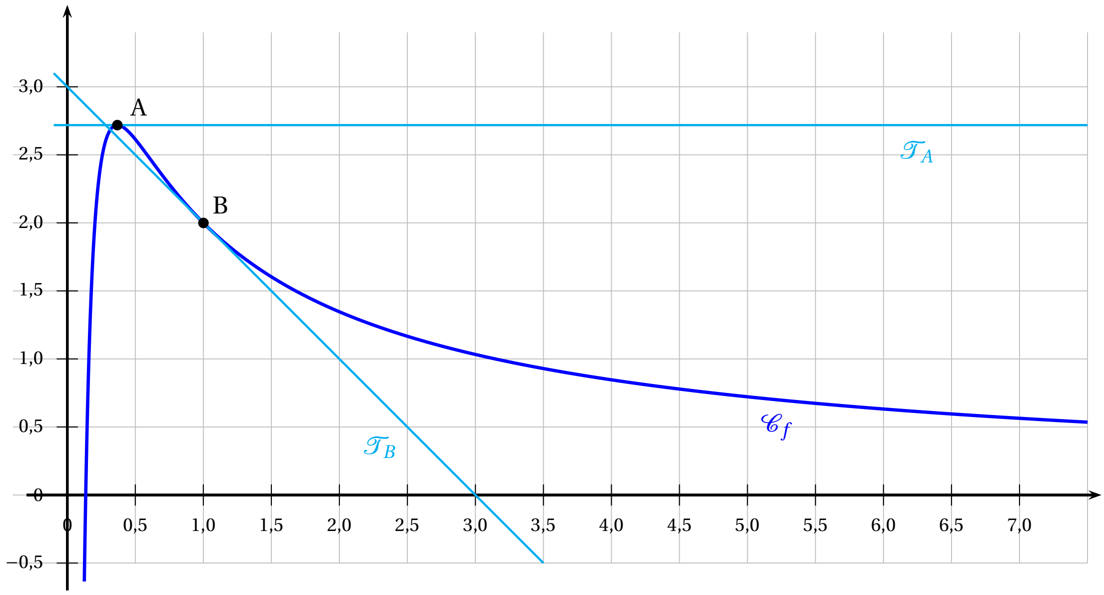
EXERCICE A — exercice au choix — 5 points

Principaux domaines abordés
Logarithme
Dérivation, convexité, limites

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$;
- la tangente $\mathscr{T}_A$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\text{e}}\,;\,\text{e}\right)$;
- la tangente $\mathscr{T}_B$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;2)$.

La droite $\mathscr{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathscr{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

PARTIE I

1.
- La droite $\mathscr{T}_A$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\text{e}}\,;\,\text{e}\right)$; elle a donc comme coefficient directeur $f'\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right)$.

  La droite $\mathscr{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul.

  On peut donc déduire que $f'\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right) = 0$.

- La droite $\mathscr{T}_B$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;2)$, donc elle a pour coefficient directeur $f'(1)$.

  La droite $\mathscr{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;3)$, donc on peut en déduire que son coefficient directeur est $\dfrac{3-0}{0-3} = -1$.

  On a donc $f'(1) = -1$.

2. La droite $\mathscr{T}_B$ a pour coefficient directeur -1 et 3 pour ordonnée à l'origine, donc elle a pour équation : $y = -x+3$.

PARTIE II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2+\ln(x)}{x}$.

1. • $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{2+\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}{\frac{1}{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}\,(2-\ln(\mathrm{e})) == \mathrm{e}\,(2-1) = \mathrm{e}$ donc $\mathrm{A} \in \mathscr{C}_f$.

   • $f(1) = \dfrac{2+\ln(1)}{1} = 2$ donc $\mathrm{B} \in \mathscr{C}_f$.

   • La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est solution de l'équation $f(x) = 0$. On résout dans $]0\,;\,+\infty[$ cette équation.

   $f(x) = 0 \iff \dfrac{2+\ln(x)}{x} = 0 \iff 2+\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -2 \iff x = \mathrm{e}^{-2}$

   Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point unique de coordonnées $\left(\mathrm{e}^{-2}\,;\,0\right)$.

2. Calculs des limites.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2+\ln(x)) = -\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2+\ln(x)) \times \dfrac{1}{x} = -\infty \text{ donc } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

3. Pour $x \in]0\,;\,\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - (2+\ln(x))\times 1}{x^2} = \dfrac{1-2-\ln(x)}{x^2} = \dfrac{-1-\ln(x)}{x^2}$.

4. $f'(x)$ est du signe de $-1-\ln(x)$; $-1-\ln(x) > 0 \iff -1 > \ln(x) \iff x < \mathrm{e}^{-1}$

   On dresse le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	e	↘	0

5. On admet que, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1+2\ln(x)}{x^3}$.

   La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels f'' est positive.

   Sur $]0\,;\,+\infty$, $x^3 > 0$ donc

   $f''(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{1+2\ln(x)}{x^3} \geqslant 0 \iff 1+2\ln(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -\dfrac{1}{2} \iff x \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

   Donc le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$.

EXERCICE B **exercice au choix** **5 points**

Principaux domaines abordés
Équations différentielles
Fonction exponentielle ; suites

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.

On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.

On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.

Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.

Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C.

On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. **a.** $f(0)$ représente la température d'une baguette lors de sa sortie du four, c'est-à-dire 225 °C.

   b. Pour résoudre l'équation, on la met sous la forme $y' = ay + b$ avec a et b des réels. On obtient :

$$y' = -6y + 150 \iff y' = ay + b \text{ avec } \begin{cases} a = -6 \\ b = 150 \end{cases}$$

   On sait alors que les solutions de cette équation sont toutes les fonctions de la forme :

$$f(t) = -\frac{b}{a} + C\,\mathrm{e}^{at},\ C \in \mathbb{R}$$

   Les solutions de l'équation différentielle sont donc toutes les fonctions de la forme :

$$f(t) = -\frac{150}{-6} + C\,\mathrm{e}^{-6t}$$
$$f(t) = 25 + C\,\mathrm{e}^{-6t}$$

   c. La solution de l'équation différentielle a été obtenue en question **b.** Il reste à exploiter la condition initiale $f(t = 0) = f(0) = 225$ d'après la valeur trouvée à la question **a.** La fonction qui satisfait donc le modèle de l'exercice est la solution de l'équation :

$$\begin{aligned} f(0) = 225 &\iff C\,\mathrm{e}^0 + 25 = 225 \\ &\iff C + 25 = 225 \\ &\iff C = 200 \end{aligned}$$

   Donc on a bien, pour tout réel $t \geqslant 0$:

$$f(t) = 200\,\mathrm{e}^{-6t} + 25$$

2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four décroît et tend à se stabiliser à la température ambiante.

   — Vérifions d'abord que la fonction f décroît. f est d'abord bien dérivable pour tout réel $t \geqslant 0$ comme composée de fonctions dérivables et :

$$\text{pour tout réel } t \geqslant 0,\ f'(t) = -1200\,\mathrm{e}^{-6t}$$

   Or, pour tout réel $t \geqslant 0$:

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-6t} & > 0 \\ -1200 & < 0 \end{cases} \implies f'(t) < 0 \implies f \text{ est bien décroissante (strictement).}$$

   — Pour vérifier que la température tend à se stabiliser à la température ambiante (25 °C), nous allons calculer la limite de la fonction f en $+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-6t} = 0 \underset{\text{par produit}}{\implies} \lim_{t\to+\infty} 200\,\mathrm{e}^{-6t} = 0 \underset{\text{par somme}}{\implies} \lim_{t\to+\infty} 200\,\mathrm{e}^{-6t} + 25 = 25 = \lim_{t\to+\infty} f(t).$$

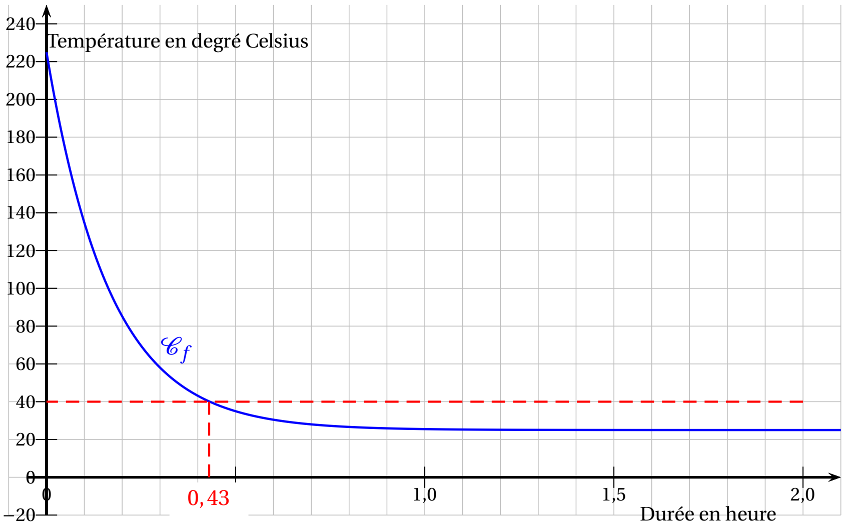
   La fonction f, qui représente la température de la baguette (en °C) au bout du temps, a pour limite 25 en $+\infty$. Cela signifie donc bien que la température tend à se stabiliser à la température ambiante de 25 °C.

Donc la fonction f fournit un modèle en accord avec ces observations.

3. La fonction f est continue et décroissante strictement donc monotone sur $[0:+\infty[$. Par ailleurs, $f(0)=225$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=25$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique élément $c\in[0;+\infty[$ tel que $f(c)=40$.

Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40 °C. On note $\mathcal{T}_0$ le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.

On donne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.



4. La courbe $\mathscr{C}_f$ semble atteindre 40 vers 0,43 heure soit $0,43\times 60=25,8$ minutes. On trouve donc une valeur approchée de 26 minutes.

5. On s'intéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température d'une baguette à sa sortie du four.

Ainsi, pour un entier naturel n, D_n désigne la diminution de température en degré Celsius d'une baguette entre la n-ième et la $(n+1)$-ième minute après sa sortie du four.

On admet que, pour tout entier naturel n : $D_n=f\left(\dfrac{n}{60}\right)-f\left(\dfrac{n+1}{60}\right)$.

a. On cherche une valeur approchée de D_0.

$$\begin{aligned}
D_0 &= f\left(\frac{0}{60}\right)-f\left(\frac{1}{60}\right)\\
&= f(0)-f\left(\frac{1}{60}\right)\\
&= 200\,\mathrm{e}^{0}+\cancel{25}-\left(200\,\mathrm{e}^{-\frac{6}{60}}+\cancel{25}\right)\\
&= 200-200\,\mathrm{e}^{-\frac{6}{60}}\\
&\approx 19,03
\end{aligned}$$

Donc 19 est bien une valeur approchée de $\mathscr{D}_0$ à 0,1 près. Cela signifie que la diminution de température qui se fait lors de la première minute après la sortie du four est d'environ 19 °C. Au bout d'une minute, la baguette est donc à $225-19=206$ °C.

b.

$$\begin{aligned}
D_n &= f\left(\frac{n}{60}\right)-f\left(\frac{n+1}{60}\right)\\
&= 200\,\mathrm{e}^{-6\times\frac{n}{60}}+\cancel{25}-\left(200\,\mathrm{e}^{-6\times\frac{n+1}{60}}+\cancel{25}\right)\\
&= 200\,\mathrm{e}^{-0,1n}-200\,\mathrm{e}^{\frac{-6n-6}{60}}\\
&= 200\,\mathrm{e}^{-0,1n}-200\,\mathrm{e}^{\frac{-6n}{60}+\left(\frac{-6}{60}\right)}\\
&= 200\,\mathrm{e}^{-0,1n}-200\,\mathrm{e}^{-0,1n}\times\mathrm{e}^{-0,1}\\
\mathscr{D}_n &= 200\,\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1}\right)
\end{aligned}$$

Pour étudier le sens de variation de la suite (D_n), on étudie le signe de $D_{n+1} - D_n$.
Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} D_{n+1} - D_n &= 200\,\mathrm{e}^{-0,1(n+1)}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1}\right) - 200\,\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1}\right)\\ &= 200\,\mathrm{e}^{-0,1n}\times \mathrm{e}^{-0,1}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1}\right) - 200\,\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1}\right)\\ D_{n+1} - D_n &= 200\,\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1-\mathrm{e}^{-0,1}\right)\left[\mathrm{e}^{-0,1}-1\right] \end{aligned}$$

Étudions le signe de cette expression pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{ll} 200\,\mathrm{e}^{-0,1n} & \geqslant 0\\ 1-\mathrm{e}^{-0,1} & \geqslant 0\\ \mathrm{e}^{-0,1}-1 & \leqslant 0 \end{array}\right. \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \mathscr{D}_{n+1} - \mathscr{D}_n \leqslant 0 \Longrightarrow \text{la suite } (\mathscr{D}_n) \text{ est décroissante.}$$

Calculons alors la limite de cette suite :

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 200\,\mathrm{e}^{-0,1n} & = 0\\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-0,1} & = 1-\mathrm{e}^{-0,1}\\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,1}-1 & = \mathrm{e}^{-0,1}-1 \end{array}\right. \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} D_n = 0$$

Nous trouvons une limite de 0 pour D_n. Puisque la baguette tend à se stabiliser à la température ambiante, la diminution de température entre la n-ième et la $(n+1)$-ième minute va tendre vers 0. Le résultat était bien prévisible dans le contexte de l'exercice.