

∞ Corrigé du baccalauréat Métropole 8 juin 2021 ∞

Candidats libres Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Question 1 : On voit que pour $t = 5$, les coordonnées du point de la droite \mathcal{D}' sont $(11 ; -9 ; -22)$ soit les coordonnées de M_2 .

Réponse b.

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite \mathcal{D}' est : $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Réponse c.

Question 3 :

Un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de la droite \mathcal{D}' est $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\frac{1}{3} \vec{u}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ou encore colinéaire

au vecteur $-\frac{1}{3} \vec{u}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ayant des vecteurs directeurs colinéaires au même vecteur sont donc parallèles.

De plus en remplaçant t par $\frac{5}{3}$ dans l'équation paramétrique de \mathcal{D}' on obtient $x = 1$, $y = 1$ et $z = -2$.

Les droites sont parallèles et ont un point commun : elles sont donc confondues.

Réponse d.

Question 4 : \mathcal{D} a pour vecteur normal $\vec{p} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -2 \end{pmatrix}$.

\mathcal{D} est parallèle au plan \mathcal{P} si \overrightarrow{AB} et \vec{p} sont orthogonaux, soit :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{p} = 0 \iff -2 \times 1 + 2 \times m + 4 \times (-2) = 0 \iff -2 + 2m - 8 = 0 \iff 2m = 10 \iff m = 5.$$

Réponse c.

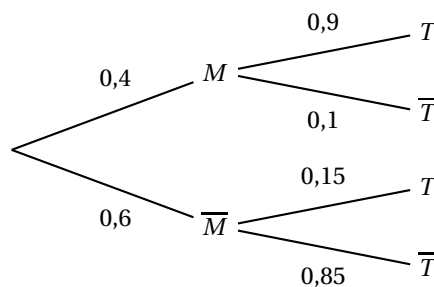
EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

- a.** On traduit la situation par un arbre pondéré.



b. Il faut trouver $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

c. On a de même $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$.

D'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,36 + 0,09 = 0,45.$$

d. Il faut trouver $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,36}{0,45} = \frac{36}{45} = \frac{9 \times 4}{9 \times 5} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0,8$.

2. a. On suppose que le nombre de chats est assez important pour que l'on puisse assimiler le choix des 20 chats à un tirage avec remise.

La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et de probabilité $p = 0,45$ trouvé à la question 1. c..

b. On a $p(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,45^5 \times (1 - 0,45)^{20-5} = 15504 \times 0,45^5 \times 0,55^{15} \approx 0,0365$ soit environ 0,037.

c. La calculatrice donne $P(X < 9) \approx 0,414$.

d. On sait que l'espérance $E = n \times p = 20 \times 0,45 = 9$.

Cela signifie que sur un grand nombre d'échantillons il y aura en moyenne 9 chats positifs par échantillon de 20.

3. a. On a encore une loi binomiale de paramètres n et de probabilité d'être positif de 0,45.

$$\text{On a } P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,45^0 \times 0,55^n = 0,55^n.$$

$$\text{Donc } p_n = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,55^n.$$

b. En partant de $n = 0$, le programme calcule p_n et augmente la taille de l'échantillon de 1 tant que $p_n < 0,99$.

c. On cherche donc n tel que $1 - 0,55^n \geq 0,99 \iff 0,01 \geq 0,55^n$, d'où par croissance de la fonction logarithme népérien : $\ln 0,01 \geq n \ln 0,55 \iff \frac{\ln 0,01}{\ln 0,55} \leq n$ (car $\ln 0,01 < 0$).

$$\text{Or } \frac{\ln 0,01}{\ln 0,55} \approx 7,7.$$

Conclusion : le programme renvoie la valeur 8.

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour n , $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}$.

1. On peut conjecturer que quel que soit n , $\frac{4}{u_n} = n + 4$.

2. On veut démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 0$.

Initialisation : $u_0 = 1 > 0$: la proposition est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$.

$$\text{Alors } u_n + 4 > 4 > 0 \text{ donc : } \frac{1}{u_n + 4} > 0 \text{ et donc } \frac{4}{u_n + 4} > 0$$

$$\text{Or } u_n > 0 \text{ (hypothèse de récurrence) donc } \frac{4u_n}{u_n + 4} > 0.$$

Soit finalement : $u_{n+1} > 0$. ; la proposition est vraie au rang $n + 1$.

La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

3. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n + 4} - u_n = \frac{4u_n - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = -\frac{u_n^2}{u_n + 4}$.

Comme $u_n + 4 > 4 > 0$ d'où l'inverse $\frac{1}{u_n + 4} > 0$ et comme $u_n^2 > 0$, $\frac{u_n^2}{u_n + 4} > 0$ et finalement

$$-\frac{u_n^2}{u_n + 4} < 0.$$

On a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est décroissante.

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : d'après le théorème de la convergence monotone, la suite est convergente vers un réel $\ell \geq 0$

5. On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{4}{u_{n+1}} - \frac{4}{u_n} = \frac{4}{\frac{4u_n}{u_n+4}} - \frac{4}{u_n} = \frac{4(u_n+4)}{4u_n} - \frac{4}{u_n} = \frac{u_n+4}{u_n} - \frac{4}{u_n} = \frac{u_n+4-4}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} = 1.$$

$v_{n+1} - v_n = 1$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

Son premier terme est $v_0 = \frac{4}{u_0} = \frac{4}{1} = 4$.

6. On sait qu'alors pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr = 4 + n$.

Or $v_n = \frac{4}{u_n} \iff u_n = \frac{4}{v_n}$ donc $u_n = \frac{4}{4+n}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \frac{4}{4+n}, \text{ donc comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{n}{4} = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

La limite de la suite (u_n) est donc 0.

EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT

5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés dans chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :

Fonction logarithme; dérivation

Partie 1

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}$.

1. + Limite en 0 : $h(x) = 1 + \frac{1}{x} \times \frac{\ln(x)}{x}$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$; donc par produit de limites $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$.

+ Limite en $+\infty$: on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc par produit et somme de limites : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$. (La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la représentation graphique de h en $+\infty$.)

2. La fonction est dérivable (admis) sur $]0; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}.$$

3. Sur $]0; +\infty[$, $x > 0$ donc $x^3 > 0$: le signe de $h'(x)$ est donc celui du numérateur $1 - 2 \ln x$.

$$+1 - 2 \ln x > 0 \iff 1 > 2 \ln x \iff \frac{1}{2} > \ln x \iff \ln x < \frac{1}{2}, \text{ soit finalement } x < e^{\frac{1}{2}} \text{ (ou encore } x < \sqrt{e}\text{)}$$

4. D'après les résultats précédents, on établit le tableau de variations de h sur $]0; +\infty[$.

$$h\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 1 + \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{e} = 1 + \frac{1}{2e} \approx 1,18$$

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$h'(x)$		+	-
$h(x)$	$-\infty$	$1 + \frac{1}{2e}$	1

D'après ce tableau de variations, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0; e^{\frac{1}{2}}[$.

On appelle α cette solution; $h\left(\frac{1}{2}\right) \approx -1,8 < 0$ et $h(1) = 1 > 0$ donc $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

5. D'après les questions précédentes, on peut établir le tableau signes de $h(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$h(x)$		-	+

Partie 2

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par : $f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2}$ et $f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}$.
On note \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Pour tout nombre réel x appartenant à $]0; +\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} - \left(x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}\right) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} - x + 2 + \frac{2\ln(x)}{x^2} = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2} = h(x)$$

- 2.
- On a vu que $h(x) < 0$ sur $]0; \alpha[$, donc sur cet intervalle $f_1(x) < f_2(x)$ donc \mathcal{C}_1 est en dessous de \mathcal{C}_2 .
 - On a vu que $h(x) > 0$ sur $] \alpha; +\infty[$, donc sur cet intervalle $f_1(x) > f_2(x)$ donc \mathcal{C}_1 est au dessus de \mathcal{C}_2 .
 - $h(\alpha) = 0$ donc $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$; donc α est l'abscisse du point d'intersection de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .
 - L'ordonnée de ce point d'intersection est $f(\alpha) = \alpha - 1 - \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} = \alpha - \left(1 + \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}\right) = \alpha - h(\alpha) = \alpha$.
 - Les deux courbes se coupent donc au point de coordonnées $(\alpha; \alpha)$.

Exercice B

Principaux domaines abordés :

Fonction exponentielle; dérivation; convexité

Partie 1

1. D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :
- la fonction f' est positive sur $] -\infty; 1[$ donc la fonction f est croissante sur cet intervalle;
 - la fonction f' est négative sur $]1; +\infty[$ donc la fonction f est décroissante sur cet intervalle.
2. D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :
- la fonction f' est décroissante sur $] -\infty; 0[$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle;
 - la fonction f' est croissante sur $]0; +\infty[$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x+2)e^{-x}$.

1. Pour tout nombre réel x , $f(x) = (x+2)e^{-x} = xe^{-x} + 2e^{-x} = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}$.

D'après le cours : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

On en déduit que la courbe \mathcal{C} admet la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, comme asymptote horizontale en $+\infty$.

On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. a. $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-1)e^{-x} = (1-x-2)e^{-x} = (-x-1)e^{-x}$.
 b. Pour tout x , $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$; donc $f'(x)$ s'annule et change de signe en $x = -1$.
 $f(-1) = (-1+2)e^1 = e$; on établit le tableau de variations de f sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-x-1$		+	-
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	e	0

- c. Sur l'intervalle $[-2; -1]$, la fonction f est strictement croissante. $f(-2) = 0 < 2$ et $f(-1) = e > 2$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique sur l'intervalle $[-2; -1]$.
3. $f''(x) = (-1) \times e^{-x} + (-x-1) \times (-1)e^{-x} = (-1+x+1)e^{-x} = xe^{-x}$
 $e^{-x} > 0$ pour tout x , donc $f''(x)$ est du signe de x .
- Sur $] -\infty; 0[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f est concave.
 - Sur $] 0; +\infty[$, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe.
 - En $x = 0$, la dérivée seconde s'annule et change de signe donc le point A d'abscisse 0 de \mathcal{C} est le point d'inflexion de cette courbe.