Corrigé du baccalauréat Asie 8 juin 2021 Jour 2
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

1.

$$f(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right)\text{e}^x.$$

On a $f(x) = x^2\text{e}^x - 2x\text{e}^x - \text{e}^x$.

- On sait que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \text{e}^x = 0$, puis que
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} 2x\text{e}^x = 0$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^2\text{e}^x = 0$, d'où par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Réponse C.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5 + \text{e}^x}$.

- On a $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{3}{5}$: la droite d'équation $y = \dfrac{3}{5}$ est asymptote horizontale au voisinage de moins l'infini ;
- On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini. Réponse C.

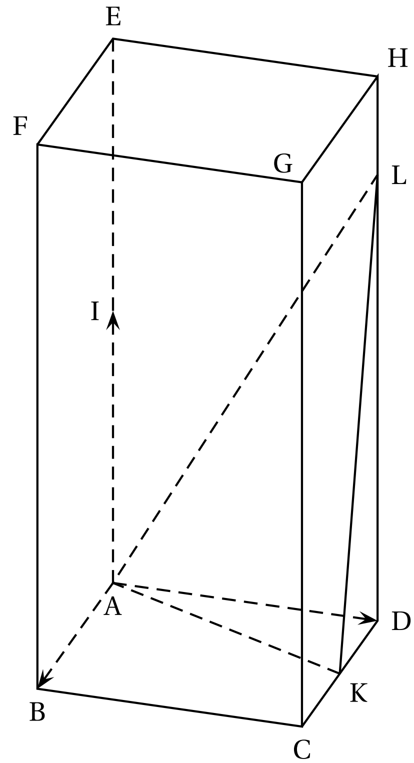
3. On voit sur la figure que $f''(-3) = f''(2) = f''(5) = 0$: la dérivée seconde s'annule trois fois donc la fonction f admet trois points d'inflexion. Réponse B.

$n^2 - 17n + 20 = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{17}{2}\right)^2 + 20 = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{289}{4} + \frac{80}{4} = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{209}{4} = \left(n - \frac{17 - \sqrt{209}}{2}\right)\left(n - \frac{17 + \sqrt{209}}{2}\right)$.

On a donc quel que soit n, $u_n \geqslant -\frac{209}{4}$: la suite est donc minorée. Réponse A.

4. Réponse A.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats



1. Avec C(1 ; 1 ; 0) et D(0 ; 1 ; 0), on obtient $\mathrm{K}\left(\frac{1}{2}~;~1~;~0\right)$, donc $\overrightarrow{\mathrm{AK}}\left(\frac{1}{2}~;~1~;~0\right)$ et on a $\overrightarrow{\mathrm{AL}}\left(0~;~1~;~\dfrac{3}{2}\right)$.

2. **a.** ✦ $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AK}} = 3-3+0=0$;

✦ $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AL}} = 0-3+3=0$: le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan AKL, il est donc orthogonal à ce plan ; c'est donc un vecteur normal à ce plan.

b. On a donc $M(x~;~y~;~z) \in (\mathrm{AKL}) \iff \overrightarrow{\mathrm{A}M}\cdot\overrightarrow{n}=0 \iff 6x-3y+2z+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$ et comme A appartient à ce plan on a : $0+0+0+d=0$.

Conclusion : $M(x~;~y~;~z)\in(\mathrm{AKL}) \iff 6x-3y+2z=0$.

c. La droite Δ contient D et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$, donc :

$M(x~;~y~;~z)\in\Delta \iff$ il existe $t\in\mathbb{R}$, $\overrightarrow{\mathrm{D}M}=t\,\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{l c r} x & = & 6t\\ y-1 & = & -3t\\ z & = & 2t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R} \iff$

$\left\{\begin{array}{l c r} x & = & 6t\\ y & = & 1-3t\\ z & = & 2t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

d. Le point N est donc le point commun au plan (AKL) et à la droite Δ, donc ses coordonnées $(x~;~y~;~z)$ vérifient le système :

$\left\{\begin{array}{l c r} x & = & 6t\\ y & = & 1-3t\\ z & = & 2t\\ 6x-3y+2z=0 & & \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R} \Rightarrow 6\times 6t+(-3)\times(1-3t)+2\times 2t=0 \iff$

$36t-3+9t+4t=0 \iff 49t=3 \iff t=\dfrac{3}{49}$; en remplaçant dans les trois premières équations du système, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& 6\times\dfrac{3}{49}\\ y &=& 1-3\times\dfrac{3}{49}\\ z &=& 2\times\dfrac{3}{49}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c r}x &=& \dfrac{18}{49}\\ y &=& \dfrac{40}{49}\\ z &=& \dfrac{6}{49}\end{array}\right. .\ \text{Conclusion : } \mathrm{N}\left(\dfrac{18}{49}\ ;\ \dfrac{40}{49}\ ;\ \dfrac{6}{49}\right).$$

3. **a.** Le triangle ADK est rectangle en D; on a par définition AD = 1 et DK = $\frac{1}{2}$.

Donc $\mathcal{A}(\text{ADK}) = \dfrac{\text{AD}\times\text{DK}}{2} = \frac{1}{4}$.

D'autre part DL = $\frac{3}{2}$, donc

$\mathcal{V}(\text{ADKL}) = \dfrac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}}{3} = \dfrac{1}{8}$.

b. On a $\overrightarrow{\text{DN}}\left(\frac{18}{49}\ ;\ \frac{40}{49}-1\ ;\ \dfrac{6}{49}\right)$, soit $\overrightarrow{\text{DN}}\left(\frac{18}{49}\ ;\ \frac{-9}{49}\ ;\ \frac{6}{49}\right)$, donc :

$\text{DN}^2 = \left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{-9}{49}\right)^2 + \left(\frac{6}{49}\right)^2 = \frac{18^2+9^2+6^2}{49^2} = \frac{324+81+36}{49^2} = \frac{441}{49^2} = \frac{21^2}{49^2} = \left(\frac{21}{49}\right)^2$.

Donc DN $= \dfrac{21}{49} = \dfrac{3}{7}$.

c. En prenant comme base le triangle AKL, on a :

$\mathcal{V}(\text{ADKL}) = \dfrac{\mathcal{A}(\text{AKL})\times\text{DN}}{3}$, soit $\dfrac{1}{8} = \dfrac{\mathcal{A}(\text{AKL})\times\frac{3}{7}}{3}$, d'où

$\mathcal{A}(\text{AKL}) = 7\times\dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$ (u. a.).

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. Il y a $\mathrm{C}_9^3 = \dfrac{9!}{3!\times(9-3)!} = \dfrac{9\times8\times7}{3\times2}3\times4\times7 = 84$ façons différentes de choisir 3 cases différentes parmi 9.
2. Il y a 3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales donc 8 combinaisons gagnantes.

   La probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à $\dfrac{8}{84} = \dfrac{4\times2}{4\times21} = \dfrac{2}{21}$.
3. Soit X la variable aléatoire égale au montant algébrique de la somme gagnée.

   On a $P(X=4) = \dfrac{2}{21}$ et $P(X=-1) = \dfrac{19}{21}$.

   On a donc $E(X) = 4\times\dfrac{2}{21} + (-1)\times\dfrac{19}{21} = \dfrac{8-19}{21} = -\dfrac{11}{21} \approx -0,524$.

   En moyenne sur un grand nombre de parties un joueur perd 58 centimes d'euro par partie. Le jeu est défavorable au joueur.
4. **a.** La variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=\dfrac{2}{21}$.

   b. On a $p(X=5) = \binom{20}{5}\times\left(\dfrac{2}{21}\right)^5\times\left(\dfrac{19}{21}\right)^{20-5} \approx 0,0271$, soit 0,027 à 10^{-3} près.

c. On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \left(\dfrac{2}{21}\right)^0 \times \left(\dfrac{19}{21}\right)^{20} \approx (1 - 0{,}1351) \approx 0{,}8649$ soit 0,865 à 10^{-3} près.

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B

EXERCICE – A

Principaux domaines abordés
– Suites
– Équations différentielles

Partie I : modèle discret

1. On a pour $n = 0$, $u_1 = u_0 + 0,05(20 - u_0) = 1 + 0,05 \times 19 = 1 + 0,95 = 1,95$.
2. **a.** Pour tout naturel n, $u_{n+1} = u_n + 0,05\,(20 - u_n) = u_n + 1 - 0,05u_n = u_n(1 - 0,05) + 1 = 0,95u_n + 1$.

   b. Pour tout naturel n, $v_{n+1} = 20 - u_{n+1} = 20 - (0,95u_n + 1) = 20 - 0,95u_n - 1 = 19 - 0,95u_n = 0,95 \times 20 - 0,95u_n = 0,95\,(20 - u_n) = 0,95v_n$.
   Conclusion : pour tout naturel n, $v_{n+1} = 0,95v_n$: cette égalité montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de terme initial $v_0 = 20 - u_0 = 20 - 1 = 19$ et de raison 0,95.

   c. On sait que pour tout $n \in n\mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$, q étant la raison, soit $v_n = 19 \times 0,95^n$.
   Or $v_n = 20 - u_n \iff u_n = 20 - v_n = 20 - 19 \times 0,95^n$.
3. On vient de démontrer que pour tout naturel n, $u_n = 20 - 19 \times 0,95^n$.
   Comme $0 < 0,95 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$, d'où par somme de limites :
   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = 20.$$

Partie II : modèle continu

$$(E) \qquad y' = 0,05(20 - y)$$

1. L est la somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
   $L'(t) = -0,05 \times \left(-19\mathrm{e}^{-0,05t}\right) = 0,95\mathrm{e}^{-0,05t}$.
   Donc L est solution de (E) si :
   $y' = 0,05(20 - y) \iff 0,95\mathrm{e}^{-0,05t} = 0,05\left(20 - \left(\left(20 - 19\mathrm{e}^{-0,05t}\right)\right) \iff 0,95\mathrm{e}^{-0,05t} = 0,05\left(19\mathrm{e}^{-0,05t}\right) \iff 0,95\mathrm{e}^{-0,05t} = 0,95\mathrm{e}^{-0,05t}$ qui est vraie.
   De plus $L(0) = 20 - 19\mathrm{e}^{-0,05\times 0} = 20 - 19 \times 1 = 1$.
2. **a.** • $L'(0) = 0,95\mathrm{e}^{-0,05\times 0} = 0,95 \times 1 = 0,95$.
   • $L'(5) = 0,95\mathrm{e}^{-0,05\times 5} = 0,95 \times \mathrm{e}^{-0,25} \approx 0,74$.
   Donc $L'(0) > L'(5)$.

b. On sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} \text{e}^{-0,05t} = 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} L'(t) = 0$.
Ce résultat est bien en cohérence avec la description du modèle de croissance du bambou : celui-ci a une taille croissante ($L'(t) > 0$) de 1 m (taille initiale) à 20 m (taille finale), la dérivée donc la vitesse de croissance se rapprochant de zéro.

EXERCICE – B

Principaux domaines abordés
– Suites, étude de fonction
– Fonction logarithme

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie I :

1. Il faut écrire dans la cellule B3 : $\boxed{\text{=B2 - ln(B2 - 1)}}$.
2. On peut penser que la suite est décroissante et a pour limite 2.

Partie II :

1. On a $\lim\limits_{x \to 1} x-1 = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x-1) = -\infty$ et enfin par somme de limites $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.
   Rem. : la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la représentation graphique de la fonction f.
2. **a.** Sachant que $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, $u(x)$ étant une fonction de x ne s'annulant pas sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$, on a donc :
   $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-1-1}{x-1} = \dfrac{x-2}{x-1}$ sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

   b. Sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ on a bien entendu $x > 1$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du dénominateur $x-2$:
   ✦ $x - 2 > 0 \iff x > 2$: $f'(x) > 0$ sur $]2~;~+\infty[$; la fonction f est croissante sur $]2~;~+\infty[$;
   ✦ $x - 2 < 0 \iff x < 2$: $f'(x) > 0$ sur $]1~;~2[$; la fonction f est décroissante sur $]1~;~2[$;
   ✦ $x - 2 = 0 \iff x = 2$: $f'(2) = 0$ la fonction f a un minimum $f(2) = 2 - \ln 1 = 2 - 0 = 2$ sur $]1~;~+\infty[$. D'où le tableau de variations :

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

c. La question précédente a montré que $f(2) = 2$ est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, donc a fortiori sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.
On a donc pour tout $x \geqslant 2,\ f(x) \geqslant 2$.

Partie III :

1. *Initialisation* : on a $u_0 = 10 \geqslant 2$: la proposition est vraie au rang 0.
   Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_n \geqslant 2$.
   Par croissance de la fonction f, on a donc $f\left(u_n\right) \geqslant f(2)$, c'est-à-dire :
   $u_{n+1} \geqslant 2$: la proposition est donc vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence la proposition :
   « $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n » est vraie.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculons $u_{n+1} - u_n = f\left(u_n\right) - u_n = u_n - \ln\left(u_n - 1\right) - u_n = -\ln\left(u_n - 1\right)$.
   Or d'après la question précédente, quel que soit $n \in \mathbb{N},\quad u_n \geqslant 2$, donc $u_n - 1 \geqslant 2 - 1$, ou $u_n - 1 \geqslant 1$, donc $\ln\left(u_n - 1\right) \geqslant 0$ et enfin $-\ln\left(u_n - 1\right) \leqslant 0$.
   Conclusion : quel que soit $n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ ou $_{n+1} \leqslant u_n$: la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante.
3. On a donc démontré dans les deux questions précédentes que la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante et minorée par 2 : elle converge donc vers une limite ℓ, telle $\ell \geqslant 2$.
4. $f(\ell) = \ell \iff \ell - \ln(\ell - 1) = \ell \iff 0 = \ln(\ell - 1) \iff 1 = \ell - 1$ (par croissance de la fonction logarithme népérien), d'où $2 = \ell$.
   La suite $\left(u_n\right)$ converge vers le nombre 2.