Sujet Baccalauréat spécialité Centres Étrangers–Suède J1 bis

7 juin 2024

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 — 4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 2y = -6x + 1$.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 6x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E).

Affirmation 2 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

La suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

Affirmation 3 : On considère la suite (u_n) définie dans l'affirmation 2.

L'instruction `suite(50)` ci-dessous, écrite en langage Python, renvoie u_{50}.

```
def suite(k):
  S=0
  for i in range(k):
    S=S+(3/4)**k
  return S
```

Affirmation 4 : Soit a un réel et f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = a\ln(x) - 2x.$$

Soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.

II existe une valeur de a pour laquelle la tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 2 — 5 points

Au cours d'une séance, un joueur de volley-ball s'entraîne à faire des services. La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,85.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le joueur réussit un service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant est égale à 0,6 ;

- si le joueur ne réussit pas un service, alors la probabilité qu'il ne réussisse pas le suivant est égale à 0,6.

Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

Partie A

On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement R_2 est égale à 0,57.
3. Sachant que le joueur a réussi le deuxième service, calculer la probabilité qu'il ait raté le premier.
4. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de services réussis au cours des deux premiers services.
   a. Déterminer la loi de probabilité de Z (on pourra utiliser l'arbre pondéré de la question 1).
   b. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(Z)$ de la variable aléatoire Z.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On s'intéresse maintenant au cas général.

Pour tout entier naturel n non nul, on note x_n la probabilité de l'évènement R_n.

1. **a.** Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}})$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $x_{n+1} = 0{,}2x_n + 0{,}4$.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = x_n - 0{,}5$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
   b. Déterminer l'expression de x_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (x_n).
   c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 — 7 points

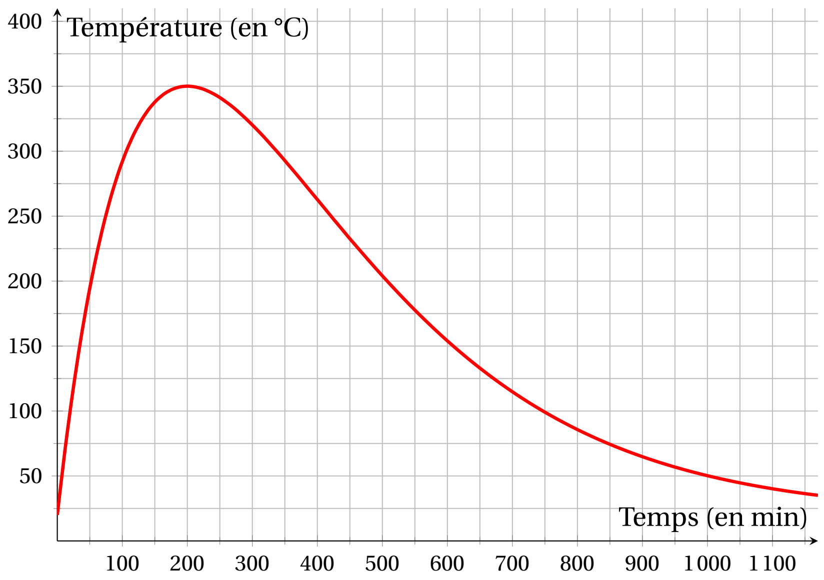
Un organisme certificateur est missionné pour évaluer deux appareils de chauffage, l'un d'une marque A et l'autre d'une marque B.

Les parties 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

Partie 1 : appareil de la marque A

À l'aide d'une sonde, on a mesuré la température à l'intérieur du foyer d'un appareil de la marque A.

On a représenté, ci-dessous, la courbe de la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer en fonction du temps écoulé, exprimé en minutes, depuis l'allumage du foyer.



Par lecture graphique :

1. Donner le temps au bout duquel la température maximale est atteinte à l'intérieur du foyer.
2. Donner une valeur approchée, en minutes, de la durée pendant laquelle la température à l'intérieur du foyer dépasse 300 °C.
3. On note f la fonction représentée sur le graphique.

   Estimer la valeur de $\dfrac{1}{600}\displaystyle\int_0^{600} f(t)\,\mathrm{d}t$. Interpréter le résultat.

Partie 2 : étude d'une fonction

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(t) = 10t\,\mathrm{e}^{-0,01t} + 20.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, $\quad g'(t) = (-0,1t + 10)\,\mathrm{e}^{-0,01t}$.

   b. Étudier les variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$ et construire son tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $g(t) = 300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[0\,;\,+\infty[$. En donner des valeurs approchées à l'unité.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie 3 : évaluation

Pour un appareil de la marque B, la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer t minutes après l'allumage est modélisée sur $[0\,;\,600]$ par la fonction g.

L'organisme certificateur attribue une étoile par critère validé parmi les quatre suivants :

— Critère 1 : la température maximale est supérieure à 320 °C.

— Critère 2 : la température maximale est atteinte en moins de 2 heures.

— Critère 3 : la température moyenne durant les 10 premières heures après l'allumage dépasse 250 °C.

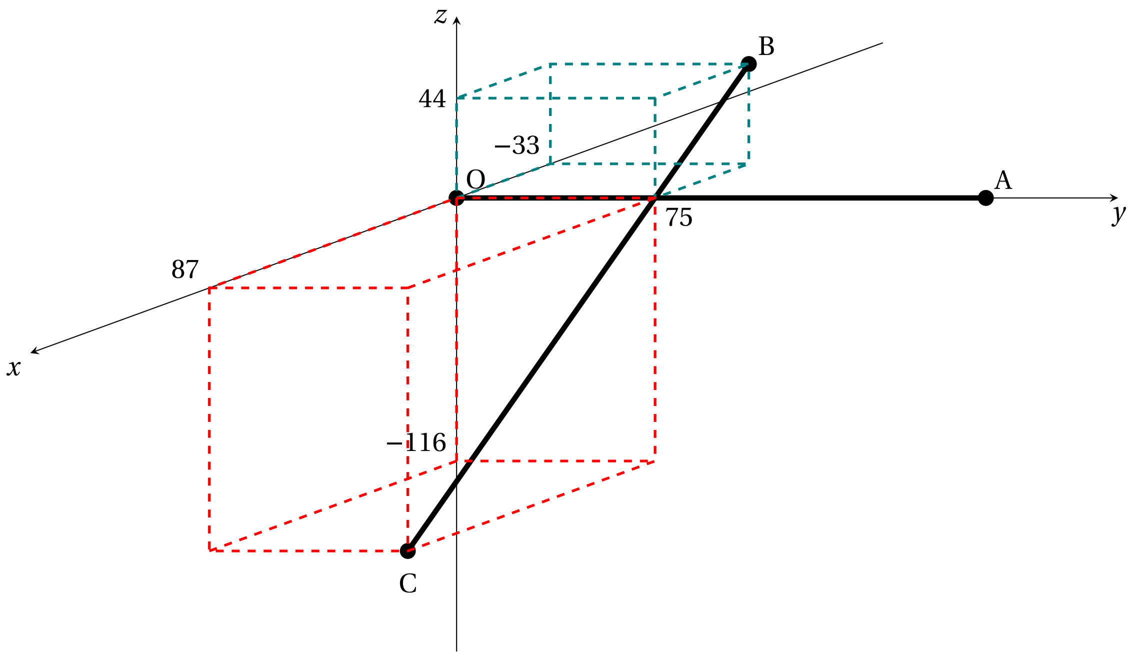
— Critère 4 : la température à l'intérieur du foyer ne doit pas dépasser 300 °C pendant plus de 5 heures.

Chaque appareil obtient-il exactement trois étoiles ? Justifier votre réponse.

Exercice 4 — 4 points

On modélise un passage de spectacle de voltige aérienne en duo de la manière suivante :

- on se place dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, une unité représentant un mètre ;
- l'avion n° 1 doit relier le point O au point A(0 ; 200 ; 0) selon une trajectoire rectiligne, à la vitesse constante de 200 m/s ;
- l'avion n° 2 doit, quant à lui, relier le point B(−33 ; 75 ; 44) au point C(87 ; 75 ; −116) également selon une trajectoire rectiligne, et à la vitesse constante de 200 m/s.
- au même instant, l'avion n° 1 est au point O et l'avion n° 2 est au point B.



1. Justifier que l'avion n° 2 mettra autant de temps à parcourir le segment [BC] que l'avion n° 1 à parcourir le segment [OA].
2. Montrer que les trajectoires des deux avions se coupent.
3. Les deux avions risquent-ils de se percuter lors de ce passage ?