Baccalauréat Asie 11 juin 2024

Sujet 2

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 5,5 points

Partie A :

1. • Limite en 0 :

   $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et, d'après la propriété des croissances comparées : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$

   Par limite de la somme, on a donc : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 - x\ln(x) = 0$

   • Limite en $+\infty$:

   $f(x) = x^2 - x\ln(x) = x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$

   Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc, par limite de la somme, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 1$

   De plus $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$, donc, par limite du produit, $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$

2. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x) = 2x - 1\times\ln(x) - x \times \dfrac{1}{x} = 2x - 1 - \ln(x)$.

3. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f''(x) = 2 - 0 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-1}{x}$.

4. Déterminons le signe de $2x - 1$:

   $$\begin{aligned} 2x - 1 > 0 &\iff 2x > 1 \\ &\iff x > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

   $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\times\dfrac{1}{2} - 1 - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - 1 + \ln(2) = \ln(2)$

   On a donc :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $2x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f'	‖	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	

5. Le minimum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$ est donc $\ln(2)$ qui est strictement positif, donc, sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$ et donc, la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B :

1. Pour tout réel x strictement positif, on a : $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

Déterminons le signe de $x - 1$:

$x - 1 > 0 \iff x > 1$

L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

$g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1$

On a donc :

x	0		1		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
variations de g	$\Vert$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

2.
$$\begin{aligned}
f(x) = x &\iff x = x^2 - x\ln(x)\\
&\iff 0 = x^2 - x - x\ln(x)\\
&\iff 0 = x(x - 1 - \ln(x))\\
&\iff 0 = x - 1 - \ln(x) \quad \text{car } x > 0 \quad \text{donc } x \neq 0\\
&\iff 1 = x - \ln(x)\\
&\iff 1 = g(x)\\
&\iff x = 1
\end{aligned}$$

L'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$, cette solution est $x = 1$.

Partie C :

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Initialisation : Calculons u_1. $u_1 = f(u_0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\ln(2)}{2} \approx 0,597$.

On constate que l'inégalité est vraie pour $n = 0$, on a bien : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Montrons que l'inégalité est vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 &\implies f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)\\
&\qquad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur }]0\,;\,+\infty[\\
&\implies f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1\\
&\qquad \text{car } f \text{ est la fonction de récurrence de la suite } (u_n)\\
&\implies \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1\\
&\qquad \text{car } f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,60 > \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ceci montre que les inégalités sont vraies au rang $n+1$.

Conclusion : Les inégalités sont vraies au rang 0, et si elle sont vraies au rang n naturel, elles sont vraies au rang suivant $n+1$, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$

2. On a notamment :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}.$ La suite (u_n) est donc croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1.$ La suite (u_n) est donc bornée par $\dfrac{1}{2}$ et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est convergente, vers une limite ℓ vérifiant $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $]0\,;\,+\infty[$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

D'après la question **2.** de la **Partie B**, cette équation n'a qu'une solution dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$: 1.

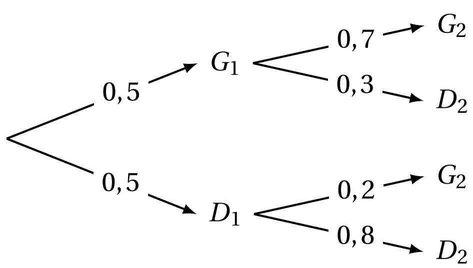
La suite (u_n) converge donc vers $\ell = 1$.

Exercice 2 5,5 points

1. D'après l'énoncé, si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70% des cas, elle perd donc la suivante dans 30 %.

On a donc $P_{G_1}(D_2) = 0,3$

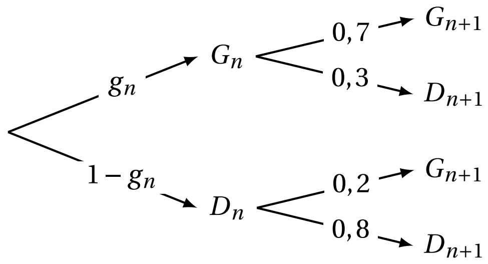
2. On a l'arbre suivant :



3. Les évènements G_1 et D_1 partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} g_2 = P(G_2) &= P(G_1 \cap G_2) + P(D_1 \cap G_2) \\ &= 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 \\ &= 0,35 + 0,1 \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

4. **a.** On a l'arbre suivant :



b. Pour tout entier naturel n non nul, les évènements G_n et D_n déterminent une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} g_{n+1} = P(G_{n+1}) &= P(G_n \cap G_{n+1}) + P(D_n \cap G_{n+1}) \\ &= g_n \times 0,7 + (1-g_n) \times 0,2 \\ &= 0,7g_n + 0,2 - 0,2g_n \\ &= 0,5g_n + 0,2 \end{aligned}$$

On arrive bien au résultat annoncé.

5. **a.** Soit n un entier non nul.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= g_{n+1} - 0,4 \quad \text{par définition de la suite } (v_n) \\ &= 0,5g_n + 0,2 - 0,4 \quad \text{par définition de la suite } \left(g_n\right) \\ &= 0,5(v_n + 0,4) - 0,2 \quad \text{car } v_n = g_n - 0,4 \iff g_n = v_n + 0,4 \\ &= 0,5v_n + 0,2 - 0,2 \\ &= 0,5v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = g_1 - 0,4 = 0,5 - 0,4 = 0,1$

b. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,1 \times 0,5^{n-1}$

Or pour tout entier naturel n non nul $\quad g_n = v_n + 0,4 \quad$ donc $\quad g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4$.

6. Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= 0,1 \times 0,5^n + 0,4 - 0,1 \times 0,5^{n-1} - 0,4 \\ &= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (0,5-1) \\ &= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (-0,5) \\ &= -0,1 \times 0,5^n \end{aligned}$$

or $0,5 > 0$ et $0,1 > 0$ donc $g_{n+1} - g_n < 0 \iff g_{n+1} < g_n$

La suite $\left(g_n\right)$ est strictement décroissante.

7. $-1 < 0,5 < 1$, donc on en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5)^n = 0$, donc, par limite du produit et de la somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 = 0,4$.

Sur le long terme, Léa gagnera son match dans 40 % des cas.

8. Déterminons les valeurs de n pour lesquels $g_n - 0,4 \leqslant 0,001$

$$\begin{aligned}
g_n - 0,4 \leqslant 0,001 &\iff 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 - 0,4 \leqslant 0,001\\
&\iff 0,1 \times 0,5^{n-1} \leqslant 0,001\\
&\iff 0,5^{n-1} \leqslant 0,01 \quad \text{car } 0,1 > 0\\
&\iff \ln\left(0,5^{n-1}\right) \leqslant \ln(0,01) \quad \text{par croissance de la fonction ln sur } \mathbb{R}^{*+}\\
&\iff (n-1)\ln(0,5) \leqslant \ln(0,01)\\
&\iff (n-1) \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} \quad \text{car } \ln(0,5) < 0\\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1 = \dfrac{-\ln(100)}{-\ln(2)} + 1 = \dfrac{\ln(100)+\ln(2)}{\ln(2)} = \dfrac{\ln(200)}{\ln(2)} \approx 7,64$ donc, n étant un entier, la plus petite valeur de n tel que $g_n - 0,4 \leqslant 0,001$ est 8.

9. Le programme complété est :

```
def seuil(e):
  g = 0.5
  n = 1
  while g > 0.4 + e :
    g = 0.5 * g + 0.2
    n = n + 1
  return(n)
```

Exercice 3

1. Affirmation 1 : VRAIE.

En effet, pour tout n entier naturel non nul, on a :

$$\frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \frac{n^2\left(3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(6+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}{6+\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

donc par limite de la somme : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2} = 3$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 6+\frac{1}{n^2} = 6$

et donc par limite du quotient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}{6+\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

D'autre part : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

La suite (u_n) est donc encadrée par deux suites ayant pour limite $\dfrac{1}{2}$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Remarque : il ne faut pas se laisser déstabiliser par le fait que tous les termes de la suite sont **strictement** supérieurs à $\dfrac{1}{2}$, quand on « passe à la limite », les inégalités deviennent large. Par exemple, la suite de terme général $\dfrac{1}{n}$ a des termes tous strictement plus grands que 0, et pourtant, sa limite est 0.

2. **Affirmation 2 : FAUSSE.**

   Sur $[-1~;~3]$, la fonction dérivée h' n'est pas croissante, la fonction h n'est donc pas convexe sur $[-1~;~3]$.

3. **Affirmation 3 : VRAIE.**

   Il y a $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 3 \times 2 = 60\,000$ codes possibles. (10 valeurs possibles pour chacun des chiffres et 3 valeurs possibles pour la première lettre et deux valeurs possible pour la deuxième car elles doivent être distinctes.)

   Déterminons le nombre de code ne contenant pas de 0 :

   Il y a $9\times9\times9\times9\times3\times2 = 39\,366$ codes ne contenant pas de 0. (9 valeurs possibles pour chacun des chiffres et 3 valeurs possibles pour la première lettre et deux valeurs possible pour la deuxième car elles doivent être distinctes.)

   Il y a donc $60\,000 - 39\,366 = 20\,634$ codes contenant au moins un zéro.

4. **Affirmation 4 : VRAIE.**

   f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout réel x strictement positif en dérivant ce produit on a :

   $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$, donc

   $xf'(x) - f(x) = x(\ln(x) + 1) - x\ln(x) = x\ln(x) + x - x\ln(x) = x$.

   Conclusion : f est bien solution sur $]0~;~+\infty[$ de l'équation différentielle $xy' - y = x$.

Exercice 4 5 points

Partie A

1. Vérifions si les coordonnées des points vérifient ou non l'équation de (P) :

   - $2x_A + 2y_A - 3z_A + 1 = 2 \times 1 + 2 \times 0 - 3 \times 1 + 1 = 2 + 0 - 3 + 1 = 0$: A est dans le plan (P) ;
   - $2x_B + 2y_B - 3z_B + 1 = 2 \times 2 + 2 \times (-1) - 3 \times 1 + 1 = 4 - 2 - 3 + 1 = 0$: B est dans le plan (P) ;
   - $2x_C + 2y_C - 3z_C + 1 = 2 \times (-4) + 2 \times (-6) - 3 \times 5 + 1 = -8 - 12 - 15 + 1 = -34 \neq 0$: C n'est pas dans le plan (P).

2. On a : $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix} 0-(-4) \\ -2-(-6) \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, d'après l'équation que l'on a du plan (P), $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P).

   Comme on a manifestement $\overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{n}$, ces vecteurs sont colinéaires, et donc la droite (CC') est orthogonale au plan (P).

   De plus : $2x_{C'} + 2y_{C'} - 3z_{C'} + 1 = 2 \times 0 + 2 \times (-2) - 3 \times (-1) + 1 = 0 - 4 + 3 + 1 = 0$: C' $\in (P)$.

   Finalement, C' est un point du plan (P) tel que (CC') est orthogonale à (P) : cela confirme que C' est le projeté orthogonal de C sur (P).

3. La droite (AB) passe par A$(1~;~0~;~1)$ et est dirigée par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc une représentation paramétrique de (AB) est : $\left\{\begin{array}{l} x = x_A + x_{\overrightarrow{AB}}\,t \\ y = y_A + y_{\overrightarrow{AB}}\,t \\ z = z_A + z_{\overrightarrow{AB}}\,t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

4. Si H est un point de (AB), cela signifie qu'il existe un réel t_0 tel que H est le point de paramètre t_0 sur (AB).

On a : (AB) et (CH) seront orthogonales (et donc nécessairement perpendiculaires, car elles ont H en commun) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont orthogonaux.

On a les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}(1+t_0)-(-4)\\(-t_0)-(-6)\\1-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5+t_0\\6-t_0\\-4\end{pmatrix}$. Comme le repère est orthonormé, on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH} = 1\times(5+t_0)+(-1)\times(6-t_0)+0\times(-4) = 5+t_0-6+t_0 = 2t_0-1$

On a donc : (AB) et (CH) sont orthogonales $\iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH} = 0$

$$\iff 2t_0-1=0$$
$$\iff t_0 = \frac{1}{2}$$

L'unique pour H de la droite (AB) pour lequel (AB) et CH) sont orthogonales est donc le point de paramètre $t_0 = \frac{1}{2} = 0,5$ dans la représentation que nous avons donnée à la question précédente. Ses coordonnées sont donc : $\text{H}(1,5\ ;\ -0,5\ ;\ 1)$.

Remarques : H est le milieu de [AB].

Si vous avez une représentation paramétrique différente de celle présentée dans ce corrigé, vous aurez aussi une valeur différente pour t_0.

Par exemple, si vous avez choisi B comme point de référence et $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur pour construire votre représentation paramétrique, vous arriverez à $t_0 = -0,5$, mais dans votre représentation paramétrique, cela vous conduira aux mêmes coordonnées pour le point H.

Partie B

Les coordonnées admises pour le vecteur $\overrightarrow{HC}$ sont cohérentes avec les coordonnées du point H à la question précédente.

1. On est dans un repère orthonormé, donc :

$$\left\|\overrightarrow{HC}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2+\left(-\frac{11}{2}\right)^2+4^2} = \sqrt{\frac{121}{4}+\frac{121}{4}+16} = \sqrt{\frac{153}{2}} = \sqrt{76,5}.$$

La valeur exacte de $\left\|\overrightarrow{HC}\right\|$ est donc : $\sqrt{\frac{153}{2}} = \sqrt{76,5}$.

2. Le point H, en tant que point de (AB) tel que (CH) est orthogonale à (AB), est donc le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Pour calculer la surface du triangle, on va donc utiliser la formule : $\mathscr{A} = \dfrac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}$.

Ici, le plus simple sera donc de choisir [AB] comme base, de longueur AB et donc la hauteur correspondante est $\text{CH} = \left\|\overrightarrow{CH}\right\|$.

On a déjà calculé CH à la question précédente, donc :

$\text{AB} = \sqrt{1^2+(-1)^2+0} = \sqrt{2}$.

L'aire de ABC est donc : $S = \dfrac{\text{AB}\times\text{CH}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{153}{2}}}{2} = \dfrac{\sqrt{153}}{2}$.

Partie C

1. • On a établi au début de l'exercice que A et B appartiennent à (P), donc toute la droite (AB) est incluse dans (P), et donc notamment H appartient à (P) aussi.

• H et C$'$ sont donc deux points de (P), et on sait que (CC$'$) est orthogonale à (P).

(CC') étant orthogonale à (P), elle orthogonale à toute droite de (P), dont la droite (C'H), ces droites sont donc perpendiculaires, car elles se coupent évidemment en C'.

Le triangle CHC' est donc un triangle rectangle en C'.

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est donné par le quotient de la longueur du côté adjacent à l'angle (ici C$'$H) par la longueur de l'hypoténuse du triangle (ici CH).

Ici, on a donc : $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{C}'\text{H}}{\text{CH}} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{17}{2}}}{\sqrt{\dfrac{153}{2}}} = \sqrt{\dfrac{17}{153}} = \sqrt{\dfrac{17\times 1}{17\times 9}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}.$

2. **a.** *Méthode* 1 *:* le plus rapide, ici, serait de calculer le produit scalaire des vecteur directeurs des deux droites, et de prouver qu'il est nul.

Mais comme on a fait quelque chose de similaire dans ce corrigé, on va explorer une voie différente :

Méthode 2 *:*

- On sait que (CH) est orthogonale à (AB), d'après la définition du point H à la question **A 4.**;
- on sait que (CC$'$) est orthogonale à (AB), car (CC$'$) étant orthogonale à (P), elle est orthogonale à toute droite incluse dans (P), notamment (AB);
- on sait que les droites (CH) et (CC$'$) sont sécantes (en C), car les points C$'$ et H sont les intersections de ces deux droites avec (P), et sont séparés par une distance non nulle.

Ainsi, on vient de démontrer que C, C$'$ et H définissent un plan, et que deux droites sécantes du plan (CC'H) sont orthogonales à (AB), donc que (AB) est orthogonale au plan (CC$'$H) et donc à toutes les droites de ce plan là, notamment à la droite (C$'$H).

Remarque : le plan (CC$'$H) est ce que l'on appelle le **plan médiateur** du segment [AB] : le plan qui passe par le milieu (H) du segment et lui est perpendiculaire.

b. On applique à nouveau la formule de calcul de l'aire d'un triangle.

Ici, on va prendre [AB] comme base et donc, d'après la question précédente, [C$'$H] est la hauteur correspondante.

On a donc : $S' = \dfrac{\text{AB}\times\text{C}'\text{H}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{\dfrac{17}{2}}}{2} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}.$

c. On a donc : $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{C}'\text{H}}{\text{CH}} = \dfrac{\text{AB}\times\text{C}'\text{H}}{\text{AB}\times\text{CH}} = \dfrac{\dfrac{\text{AB}\times\text{C}'\text{H}}{2}}{\dfrac{\text{AB}\times\text{CH}}{2}} = \dfrac{S'}{S}.$

Voilà une relation possible.

On peut aussi écrire : $S' = \cos(\alpha)S$ par exemple.