Baccalauréat Asie 10 juin 2024

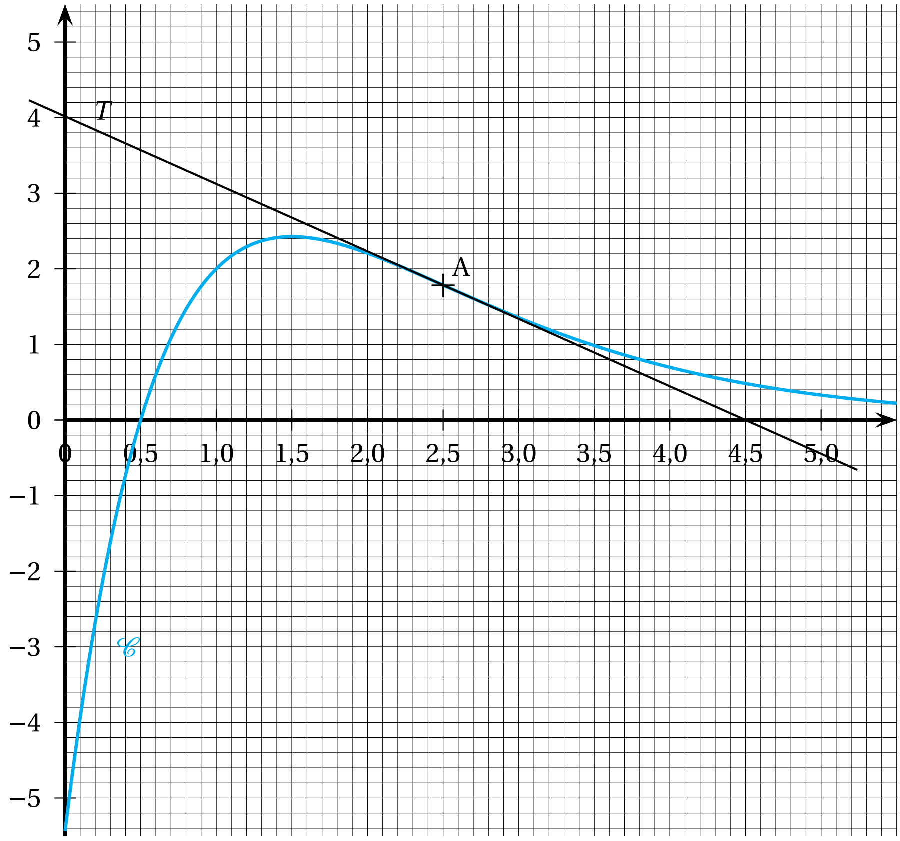
Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

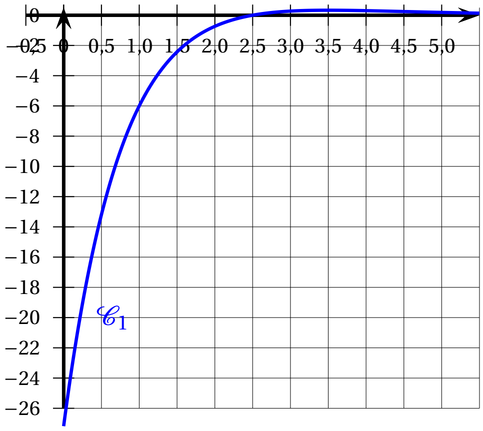
On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\frac{5}{2}$.



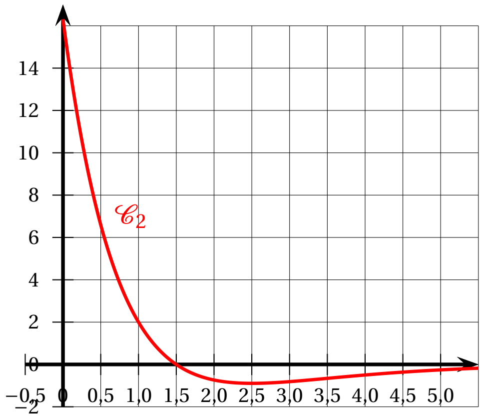
1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
2. Que semble présenter la courbe $\mathscr{C}$ au point A ?
3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.

   Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente.

   Ce choix sera justifié.

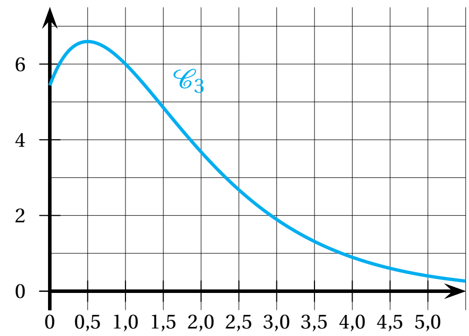


Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

4. La courbe $\mathscr{C}_3$ ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0~;~+\infty[$ d'une primitive de la fonction f ? Justifier.



Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$, est définie par

$$f(x) = (4x-2)\text{e}^{-x+1}.$$

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. Étude de la fonction f

a. Montrer que $f'(x) = (-4x+6)\text{e}^{-x+1}$.

b. Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.

2. On considère une fonction F définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\text{e}^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.

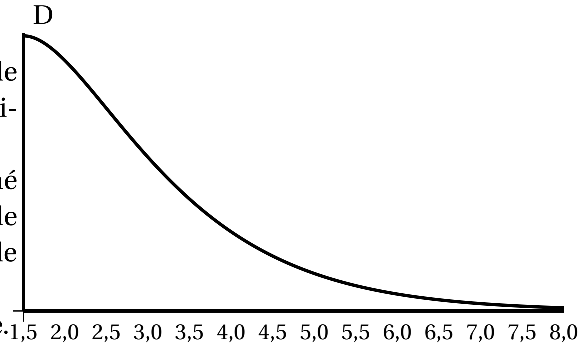
a. Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.

b. On admet que F(x) = (-4x - 2)e-X+1 est une primitive de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.

En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'intégrale

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\text{d}x.$$

3. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.
Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2} ; 8\right]$.
L'unité de longueur est le mètre.

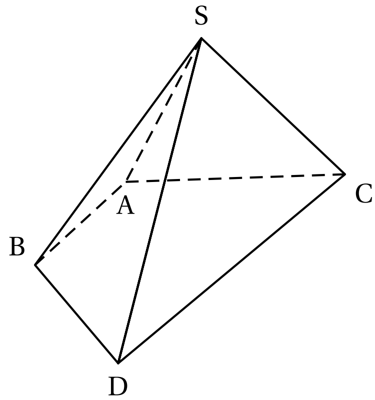


  a. Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.

  b. La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur.
  Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de $0,8\ \text{m}^2$, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.

EXERCICE 2 — 5 POINTS

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points : A(3; -1; 1); B(4; -1; 0); C(O ; 3; 2); D(4; 3; -2) et S(2; 1; 4).
Dans cet exercice on souhaite montrer que SABDC est une pyramide à base ABDC trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.



1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **a.** Montrer que les points A, B, Cet D sont coplanaires.

   b. Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].
   On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.

3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(2 ; 1 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).

   d. On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
   Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{8}{3}\right)$, puis montrer que SI = 2 cm.

4. **a.** Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées H(3 ; 3 ; -1) et montrer que HB = $3\sqrt{2}$ cm.

b. Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.

On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule

$$\mathscr{A} = \frac{b+B}{2} \times h$$

où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.

5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Dans la revue *Lancet Public Health*, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.
Source : https ://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667 (21) 00064-5/fulltext
On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

Partie A

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.

On note I l'évènement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »

Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?

2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres.

On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.

On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.

a. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b. Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

c. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ?

On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

d. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ?

On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

e. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) > 0,9$.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B :

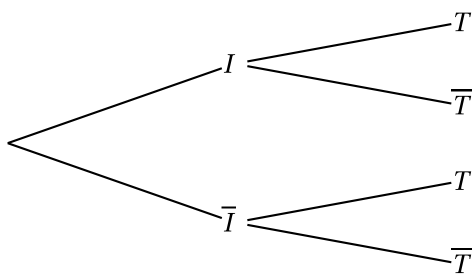
Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection), si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19.
Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID 19.

Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa sensibilité et sa spécificité.
La **sensibilité** d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai positif).
La **spécificité** d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai négatif).
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :

- Sa sensibilité est de 0,8.
- Sa spécificité est de 0,99.

On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note T l'évènement « le test réalisé est positif ».

1. Compléter l'arbre des probabilités ci-dessous avec les données de l'énoncé :



2. Montrer que $p(T) = 0{,}05503$.

3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif?

On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

Partie C :

On considère un groupe d'une population d'un autre pays soumis au même test de sensibilité $0,8$ et de spécificité $0,99$.
Dans ce groupe la proportion d'individus ayant un test positif est de $29,44\,\%$.
On choisit au hasard un individu de ce groupe; quelle est la probabilité qu'il ait été infecté?

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée.
Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. **Affirmation 1** : Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.

2. On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n,on a $u_n \leqslant \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n}$.

Affirmation 2 : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

3. On considère la fonction suivante écrite en langage Python :

```
def terme(N) :
    U =1
    for i in range(N) :
        U=U+i
    return U
```

Affirmation 3 : terme(4) renvoie la valeur 7.

4. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :

- Prix A : il reçoit 1 000 euros par jour pendant 15 jours;
- Prix B : il reçoit 1 euro le 1$^{\text{er}}$ jour, 2 euros le 2$^{\text{e}}$ jour, 4 euros le 3$^{\text{e}}$ jour et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

Affirmation 4 : La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$v_n = \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x.$$

Affirmation 5 : La suite (v_n) est croissante.