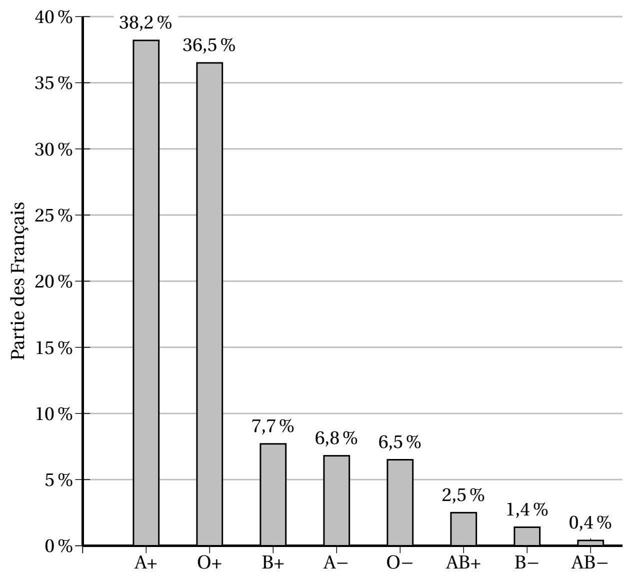
Corrigé du Baccalauréat Amérique du Sud 22 novembre 2024
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Jour 2

Exercice 1 — 5 points

Voici la répartition des principaux groupes sanguins des habitants de France :



Une expérience aléatoire consiste à choisir une personne au hasard dans la population française et à déterminer son groupe sanguin et son rhésus.

Partie 1

1. Le pourcentage de personne ayant un rhésus positif est : $38{,}2 + 36{,}5 + 7{,}7 + 2{,}5$ soit $84{,}9\,\%$. Donc la probabilité $P(Rh+)$ que la personne choisie soit de rhésus positif est égale à 0,849.
2. On cherche $P_{Rh+}(A) = \dfrac{P(Rh+\cap A)}{P(Rh+)} = \dfrac{P(A+)}{P(Rh+)}$

   Il y a $38{,}2\,\%$ de personnes A+ dans la population donc $P(A+) = 0{,}382$.

   Donc $P_{Rh+}(A) == \dfrac{0{,}382}{0{,}849} \approx 0{,}450$.
3. Une personne se souvient que son groupe sanguin est AB mais a oublié son rhésus.

   La probabilité que son rhésus soit négatif est : $P_{AB}(Rh-) = \dfrac{P(Rh-\cap AB)}{P(AB)} = \dfrac{P(AB-)}{P(AB)}$.

   Il y a $0{,}4\,\%$ de personnes AB– dans la population donc $P(AB-) = 0{,}004$.

   $2{,}5+0{,}4 = 2{,}9$ donc il y a $2{,}9\,\%$ de personnes AB dans la population donc $P(AB) = 0{,}029$.

   $\dfrac{0{,}004}{0{,}029} \approx 0{,}138$ donc la probabilité que son rhésus soit négatif est 0,138 à 0,001 près.

Partie 2

Un donneur universel de sang est une personne de groupe sanguin O et de rhésus négatif. On rappelle que 6,5 % de la population française est de groupe O− donc $P(O-) = 0{,}065$.

1. On considère 50 personnes choisies au hasard dans la population française et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de donneurs universels.

a. Le choix au hasard de 50 personnes peut être assimilé à un tirage avec remise donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de donneurs universels suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}065$.

La probabilité que 8 personnes soient des donneurs universels est donc :

$P(X = 8) = \binom{50}{8} \times 0{,}065^8 \times (1 - 0{,}065)^{50-8} \approx 0{,}010.$

b. On considère la fonction ci-dessous nommée `proba` d'argument `k` écrite en langage Python.

```
def proba(k):
  p = 0
  for i in range(k+1):
    p = p + binomiale(i , 50 , 0.065)
  return p
```

Cette fonction utilise la fonction `binomiale` d'argument i,n et p, créée pour l'occasion, qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

La valeur numérique renvoyée par la fonction `proba` lorsqu'on saisit `proba(8)` dans la console Python correspond à $P(X \leqslant 8)$ et vaut environ 0,995 ; cela veut dire qu'il y a une probabilité de 0,995 que sur les 50 personnes, il y en ait au plus 8 de groupe O–..

2. On veut déterminer le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel, soit supérieure à 0,999.

Autrement dit on cherche n pour que $P(X \geqslant 1) > 0{,}999$, donc en passant par l'événement contraire : $1 - P(X = 0) > 0{,}999$.

Pour une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}065$, on a : $P(X = 0) = \binom{50}{0} \times 0{,}065^0 \times (1 - 0{,}06()^n = 0{,}935^n$.

On résout l'inéquation : $1 - 0{,}935^n > 0{,}999$.

$$\begin{aligned}
1 - 0{,}935^n > 0{,}999 &\iff 1 - 0{,}999 > 0{,}935^n \iff 0{,}001 > 0{,}935^n \\
&\iff \ln(0{,}001) > \ln\left(0{,}935^n\right) \quad \text{(croissance de la fonction ln)} \\
&\iff \ln(0{,}001) > n \times \ln(0{,}935) \\
&\iff \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}935)} < n \quad (\text{car } \ln(0{,}935) < 0)
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}935)} \approx 102{,}8$ donc le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel, soit supérieure à 0,999 est $n = 103$.

Exercice 2 — 5 points

Partie 1

$$u_0 = 10 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

1. **Affirmation 1** : Vraie Démonstration par récurrence :

   soit P_n la proposition : « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».

   Initialisation : $I_0 = 10$ et $I_1 = \frac{1}{3} \times 10 + 2 = \frac{10}{3} + \frac{6}{3} = \frac{16}{3} < \frac{30}{3}$, soit $0 \leqslant I_1 \leqslant I_0$: la proposition est vraie au rang 0 ;

   Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$; il en résulte par produit par le réel positif $\frac{1}{3}$ que $0 \leqslant \frac{1}{3}u_{n+1} \leqslant \frac{1}{3}u_n$ puis par somme avec 2 :

   $2 \leqslant \frac{1}{3}u_{n+1} + 2 \leqslant \frac{1}{3}u_n + 2$, soit finalement :

   $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: la proposition est vraie au rang $n+1$.

   Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

   $0 < 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, autrement dit la suite est décroissante et minorée par 0.
2. **Affirmation 2** : Fausse

   En effet dans la question précédente on a montré au moment de l'hérédité que pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant 2$, donc pour $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 2 > 0$: la limite de la suite ne peut être nulle.
3. **Affirmation 3** : Vraie .

   $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$.

   L'égalité $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ vraie pour tout naturel n montre que le suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 10 - 3 = 7$.

   On sait qu'alors pour $n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n$ (avec q raison de la suite), soit $v_n = 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

   Comme $0 < \frac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$, ce qui améliore le résultat de la question précédente.

Partie 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{3}{2}y + 2$ d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

1. **Affirmation 4** : Vraie. Il existe une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).

   Soit g la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = K$, avec $K \in \mathbb{R}$; alors $g'(x) = 0$.

   g est donc solution de l'équation différentielle si

   $g'(x) = \dfrac{3}{2}g(x) + 2 \iff 0 = \dfrac{3}{2} \times K + 2 \iff \dfrac{3}{2}K = -2 \iff K = -\dfrac{4}{3}$.

2. Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 0$.

3. **Affirmation 5** : Vraie La tangente au point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}_f$ a pour coefficient directeur $2\text{e}^{\frac{3}{2}}$.

   Soit f une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E), alors :

   $f'(x) = \dfrac{3}{2}f(x) + 2$. Or on a vu que $g'(x) = \dfrac{3}{2}g(x) + 2$, d'où par différence membre à membre de ces deux égalités :

   $f'(x) - g'(x) = \dfrac{3}{2}f(x) - \dfrac{3}{2}g(x) \iff f'(x) - g'(x) = \dfrac{3}{2}(f(x) - g(x)) \iff$

   $((f-g)'(x) = \dfrac{3}{2}(f(x) - g(x))$ par linéarité de la dérivation : ceci signifie que la fonction $f - g$ est solution de l'équation $y' = \dfrac{3}{2}y$ dont les solutions sont les fonctions $x \longmapsto K\text{e}^{\frac{3}{2}x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

   On a donc $f(x) - g(x) = f(x) - \left(-\dfrac{4}{3}\right) = K\text{e}^{\frac{3}{2}x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

   Finalement les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = K\text{e}^{\frac{3}{2}x} - \dfrac{4}{3}$.

   En particulier la fonction f_1 telle que $f_1(0) = 0$ vérifie $K\text{e}^0 - \dfrac{4}{3} \iff K = \dfrac{4}{3}$, donc

   $f_1(x) = \dfrac{4}{3}\text{e}^{\frac{3}{2}x} - \dfrac{4}{3}$.

   Puisque f_1 est une solution de (E), on a $f_1'(1) = \dfrac{3}{2}f(1) + 2 = \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{4}{3}\text{e}^{\frac{3}{2}\times 1} - \dfrac{4}{3}\right] + 2 =$

   $2\text{e}^{\frac{3}{2}} - 2 + 2 = 2\text{e}^{\frac{3}{2}}$. Le nombre dérivé en 1 est égal à la pente de la tangente à la courbe représentative de f_1 au point d'abscisse 1.

Exercice 3 — 5 points

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 4\right)\text{e}^{-x}.$$

1. Limites :

   - : en $-\infty$: de $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{e}^{-x} = +\infty$ on en déduit par produit de limites que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$;
   - : en $+\infty$ $f(x) = x^2\text{e}^{-x} - 4\text{e}^{-x}$: on sait que

$\lim\limits_{x \to +\infty} 4\mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$ (puissances comparées), donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Sur cet intervalle :

$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + \left(x^2 - 4\right) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(2x - x^2 + 4) = \left(-x^2 + 2x + 4\right)\mathrm{e}^{-x}$.

3. On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $-x^2 + 2x + 4$.

On a $-x^2 + 2x + 4 = -\left(x^2 - 2x - 4\right) = -\left[(x-1)^2 - 1 - 4\right] = -\left[(x-1)^2 - 5\right] =$

$-x^2 + 2x + 4 = -\left(x - 1 + \sqrt{5}\right)\left(x - 1 - \sqrt{5}\right)$: ce trinôme a deux racines $1 - \sqrt{5}$ et $1 + \sqrt{5}$.

On sait que le trinôme a le signe de $a = -1$, donc est négatif sauf sur l'intervalle $\left[1 - \sqrt{5}\,;\, 1 + \sqrt{5}\right]$ où il est positif.

On a donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		0		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			$+$			$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\approx -8{,}5$	$\nearrow$	-4	$\nearrow$	$\approx 0{,}25$	$\searrow$	0

On a $f\left(1 - \sqrt{5}\right) = \left(2 - 2\sqrt{5}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}-1} \approx -8{,}5$;

$f\left(1 + \sqrt{5}\right) = \left(2 + 2\sqrt{5}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{5}-+1} \approx 0{,}25$;

$f(0) = -4$

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. $I_0 = \displaystyle\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{0} = -\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2 - 1$.

2. On calcule I_n en faisant une intégration par partie : on a

$\left\{\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \mathrm{e}^{-x} & u'(x) & = & -\mathrm{e}^{-x} \\ v'(x) & = & x^n & v(x) & = & \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{array}\right.$ on a

$I_n = \left[\mathrm{e}^{-x} \times \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{-2}^{0} - \displaystyle\int_{-2}^{0} -\mathrm{e}^{-x}x^n = 0 - \dfrac{(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2}{n+1} + \dfrac{I_{n+1}}{n+1} \iff$

$(n+1)I_n = -(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + I_{n+1} \iff I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n$.

3. L'égalité précédente donne avec :

- $n = 0$: $I_1 = (-2)^1\mathrm{e}^2 + I_0 = -2\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 - 1 = -\mathrm{e}^2 - 1$,
- $n = 1$: $I_2 = (-2)^2\mathrm{e}^2 + I_1 = 4\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^2 - 2 = 2\mathrm{e}^2 - 2$.

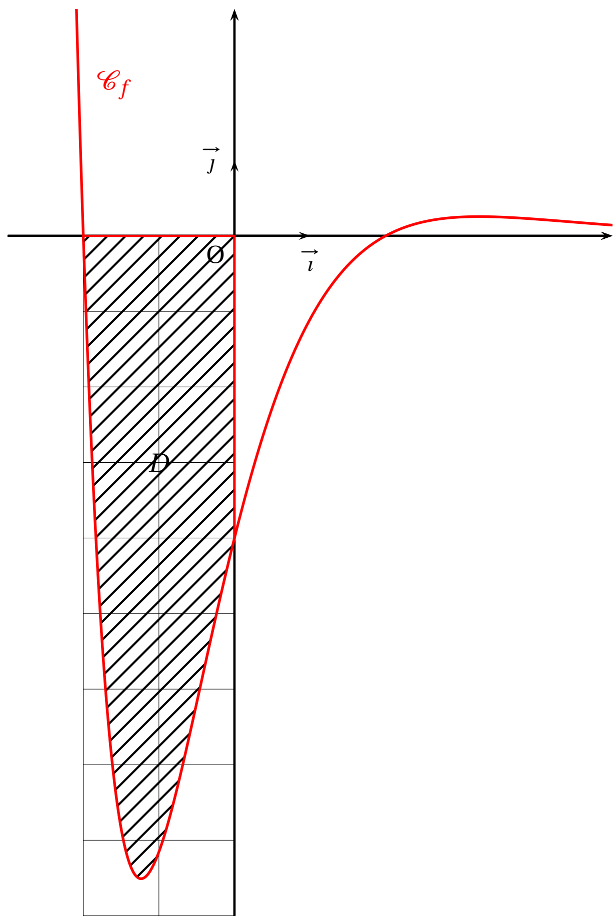
Partie 3

1. f a le signe du trinôme $x^2 - 4$ car quel que soit $x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{e}^{-x} > 0$.

   Comme $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ ce trinôme a le signe de $a = 1$ donc est positif, sauf sur l'intervalle borné par les deux racines soit sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$ où $f'x) < 0$.

   Donc sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$, $f(x) < 0$ et sur $]-\infty\,;\,-2[\cup]2\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$.
2. $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -2 t on vient de voir que sur l'intervalle $]-2\,,0[$, $f(x) < 0$, donc l'aire S du domaine D est égale à l'opposé de l'intégrale de la fonction d de $x = -2$ à $x = 0$.

   aire$(D) = -\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{0}\left(x^2-4\right)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\int_{-2}^{0} x^2\mathrm{e}^{-x} + 4\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^{-x} = -I_2 + 4I_1 =$ $4\left(-\mathrm{e}^2 - 1\right) - \left(2\mathrm{e}^2 - 2\right) = 2\mathrm{e}^2 - 2 \approx 12{,}78$ (ce que l'on peut conforter avec la figure).



Exercice 4 — 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

On considère les trois points A(3 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 2).

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

1. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\,(2\ ;\ 3\ ;\ 3)$.

- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $(-3\,;2\,;0)$.
  $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{n} = -3\times2+2\times3+0\times3 = 0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{n}$
- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ a pour coordonnées $(-3\,;0\,;2)$.
  $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{n} = -3\times2+0\times3+2\times3 = 0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{n}$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ non colinéaires, donc il est normal au plan (ABC).

2. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\perp\overrightarrow{n}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ a pour coordonnées $(x-3\,;\,y\,;\,z)$.

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\perp\overrightarrow{n} \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{n}=0 \iff 2\,(x-3)+3y+3z=0 \iff 2x+3y+3z-6=0$

Le plan (ABC) a donc pour équation cartésienne :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in \mathrm{ABC} \iff 2x+3y+3z-6=0.$$

3. La droite d passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{n}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = t.\overrightarrow{n}$ où $t\in\mathbb{R}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ a pour coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$. Or $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = t.\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t\\ y &=& 3t\\ z &=& 3t\end{array}\right.$

La droite d passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ a donc pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t\\ y &=& 3t\\ z &=& 3t\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$

4. On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC).

Les coordonnées de H vérifient le système $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t\\ y &=& 3t\\ z &=& 3t\\ 2x+3y+3z-6 &=& 0\end{array}\right.$

On a donc : $2\,(2t)+3\,(3t)+3\,(3t)-6=0$, donc $22t=6$ donc $t=\dfrac{3}{11}$.

Les coordonnées de H sont donc : $\left(\dfrac{6}{11}\,;\dfrac{9}{11}\,;\dfrac{9}{11}\right)$.

5. La distance du point O au plan (ABC) est OH.

$\mathrm{OH}^2 = \left(\dfrac{6}{11}\right)^2+\left(\dfrac{9}{11}\right)^2+\left(\dfrac{9}{11}\right)^2 = \dfrac{36+81+81}{11^2} = \dfrac{198}{11^2}$ donc $\mathrm{OH} = \dfrac{\sqrt{198}}{11} = \dfrac{3\sqrt{22}}{11}$.

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. En prenant pour base le triangle OAB et pour hauteur OC, le volume du tétraèdre OABC vaut $\dfrac{\mathrm{OC}\times\mathrm{aire(OAB)}}{3}$.

$\text{OC} = 2$ et $\text{aire(OAB)} = \dfrac{\text{OA} \times \text{OB}}{2} = \dfrac{3 \times 2}{3} = 3$

Le volume du tétraèdre OABC est donc égal à $\dfrac{2 \times 3}{3} = 2$.

2. En prenant pour base le triangle ABC et pour hauteur OH, le volume du tétraèdre OABC vaut $\dfrac{\text{OH} \times \text{aire(ABC)}}{3}$.

Ce volume vaut 2 et $\text{OH} = \dfrac{3\sqrt{22}}{11}$, donc $2 = \dfrac{\frac{3\sqrt{22}}{11} \times \text{aire(ABC)}}{3}$.

On en déduit que : $\text{aire(ABC)} = \dfrac{6}{\text{OH}} = \dfrac{6}{\frac{3\sqrt{22}}{11}} = \dfrac{6 \times 11}{3\sqrt{22}} = \dfrac{22}{\sqrt{22}} = \sqrt{22}$.

3. Soit la propriété : pour le tétraèdre OABC, « le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre ».

- $\text{aire(OAB)} = 3$ donc $(\text{aire(OAB)})^2 = 9$
- $\text{aire(OAC)} = \dfrac{\text{OA} \times \text{OC}}{2} = \dfrac{3 \times 2}{2} = 3$ donc $(\text{aire(OAC)})^2 = 9$
- $\text{aire(OBC)} = \dfrac{\text{OB} \times \text{OC}}{2} = \dfrac{2 \times 2}{2} = 2$ donc $(\text{aire(OBC)})^2 = 4$

Donc $(\text{aire(OAB)})^2 + (\text{aire(OAC)})^2 + (\text{aire(OBC)})^2 = 9 + 9 + 4 = 22$.

Comme $\text{aire(OABC)} = \sqrt{22}$, on a :
$(\text{aire(OABC)})^2 = 22 = (\text{aire(OAB)})^2 + (\text{aire(OAC)})^2 + (\text{aire(OBC)})^2$.

La propriété est vérifiée.