Corrigé du baccalauréat Métropole

Sujet 1 11 septembre 2023

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **4 points**

1.

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x^2-3}.$$

Avec $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-3}$, on a $F'(x) = 2x \times \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-3} = x\mathrm{e}^{x^2-3} = f(x)$: réponse **d.**

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \mathrm{e}^{2n+1}.$$

Si pour tout entier naturel n, $u_n = \mathrm{e}^{2n+1}$, alors $u_{n+1} = \mathrm{e}^{2(n+1)+1} = \mathrm{e}^{2n+2+1} = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{2n+1} = \mathrm{e}^2 \times u_n$: cette égalité montre que la suite (u_n) est géométrique de raison e^2 : réponse **c.**

Pour les questions **3.** et **4.**, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 15 \quad \text{et pour tout entier naturel } n \quad : u_{n+1} = 1{,}2u_n + 12.$$

3.

```
def seuil() :
    n=0
    u=15
    while u⩽10000:
      n=n+1
      u=1,2*u+12
    return(n)
```

Réponse **a.**

4. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 60$.

On a quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 60 = 1{,}2u_n + 12 + 60 = 1{,}2u_n + 72 = 1{,}2\left(u_n + 60\right) = 1{,}2v_n$: cette égalité montre que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,2.

EXERCICE 2 **5 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère les points

$$\mathrm{A}(1\,;\,0\,;\,-1),\quad \mathrm{B}(3\,;\,-1\,;\,2),\quad \mathrm{C}(2\,;\,-2\,;\,-1)\quad \text{et}\quad \mathrm{D}(4\,;\,-1\,;\,-2).$$

On note Δ la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 0\\ y & = & 2+t\\ z & = & -1+t\end{array}\right., \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

1. **a.** On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (en comparant les premières coordonnées, s'il l'étaient on aurait $\overrightarrow{\text{AB}} = 2\overrightarrow{\text{AC}}$, ce qui est faux), donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan unique $\mathcal{P}$.

b. On a $\overrightarrow{\text{CD}}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, puis

- $\overrightarrow{\text{CD}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 4-1-3 = 0$;
- $\overrightarrow{\text{CD}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 2-2+0 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{CD}}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$, c'est donc un vecteur normal à ce plan.

Puisque $\overrightarrow{\text{CD}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 0$ les droites (CD) et (AC) sont perpendiculaires en C, donc C est le projeté orthogonal de D sur le plan $\mathcal{P}$.

c. Puisque $\overrightarrow{\text{CD}}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, on sait que ses cordonnées sont dans l'ordre les coefficients a, b, c de x, y, z, soit :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathcal{P} \iff 2x+1y-1z+d = 0$.

En particulier $\text{C}(2\,;\,-2\,;\,-1) \in \mathcal{P} \iff 2\times 2+1\times(-2)-1\times(-1)+d = 0 \iff 4-2+1+d = 0 \iff d = -3$.

Finalement : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \mathcal{P} \iff 2x+y-z-3 = 0$.

2. **a.** On a grâce aux coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{CD}}$, $\text{CD}^2 = 4+1+1 = 6$, d'où $\text{CD} = \sqrt{6}$.

b. Puisque C est le projeté orthogonal de D sur le plan $\mathcal{P}$, ce point est celui qui est à la plus courte distance du point D, soit $\sqrt{6}$: il n'existe donc pas d'autre point de $\mathcal{P}$ situé à cette distance $\sqrt{6}$ de D;

Ou encore : la sphère de centre D et de rayon $\sqrt{6}$ est tangente en C au plan $\mathcal{P}$, donc quel que soit M dans $\mathcal{P}$, le triangle DCM est rectangle en C, d'hypoténuse [DM] et l'on sait qu'alors $\text{DM} > \text{DC} = \sqrt{6}$: tout point M du plan aurez que C est donc à une distance supérieure à $\sqrt{6}$ de D.

3. **a.** Si $M(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à Δ et à $\mathcal{P}$ ses coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 0\\ y & = & 2+t\\ z & = & -1+t\\ 2x+y-z-3 & = & 0\end{array}\right., \text{ avec } t \in \mathbb{R} \Rightarrow 2\times 0+2+t-(-1+t)-3 = 0 \iff 0 = 0 \text{ : ceci}$$

signifie que tout point de Δ appartient à $\mathcal{P}$ donc que Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ.

b. Un vecteur directeur de la droite Δ est $\delta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et avec $\text{H}(0\,;\,2+t\,;\,-1+t)$, on a $\overrightarrow{\text{DH}}\begin{pmatrix}4\\3+t\\1+t\end{pmatrix}$.

Or (DH) $\perp \Delta \Rightarrow \delta \cdot \overrightarrow{\text{DH}} = 0 \iff 0+3+t+1+t=0 \iff 4+2t=0 \iff 2t=-4 \iff t=-2$.
On a donc H$(0~;~0~;~-3) \in \Delta$.

c. On a donc $\overrightarrow{\text{DH}}\begin{pmatrix}4\\3-2\\1-2\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\text{DH}}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$; il en résulte que DH$^2 = 4^2+1^2+(-1)^2 = 18$.
Finalement DH $= \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

EXERCICE 3 **4 points**

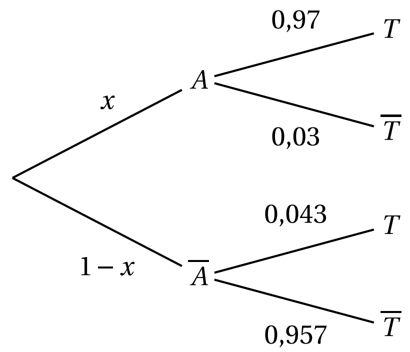
Les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*

Partie A

1. D'après l'énoncé :

- $p_A(T) = 0,97$;
- $p_{\overline{A}}\left(\overline{T}\right) = 0,957$;
- $p(T) = 0,2$.

D'où l'arbre pondéré :



2. **a.** D'après la loi des probabilités totales :
$p(T) = p(A\cap T) + p\left(\overline{A}\cap T\right) = p(A)\times p_A(T) + p\left(\overline{A}\right)\times p_{\overline{A}}(T) = x\times 0,97 + (1-x)\times 0,043 = 0,97x + 0,043 - 0,043x = 0,927x + 0,043$.

b. Comme $p(T) = 0,2 = 0,927x + 0,043 \iff 0,157 = 0,927x \iff \dfrac{0,157}{0,927} = x$.
Or $\dfrac{0,157}{0,927} \approx 0,1694$ soit 0,169 au millième près.
$x = p(A) \approx 0,169$.

3. L'affirmation se traduit par : $p_T(A) > 0,8$.
Or $p_T(A) = \dfrac{p(T\cap A)}{p(T)} = \dfrac{p(A\cap T)}{p(T)} = \dfrac{p(A)\times p_A(T)}{p(T)} \approx \dfrac{0,169\times 0,97}{0,2}$, soit
$p_T(A) \approx \dfrac{0,16393}{0,2} \approx 0,81965$, soit environ 81,97 % : l'affirmation est vraie.

Partie B

1. Les tirages successifs étant indépendants et chaque personne ayant un probabilité d'être allergique égale à 0,08, X suit une loi de Bernoulli de paramètres $n = 150$ et $p = 0,08$.

2. La calculatrice donne $p(X = 20) \approx 0,00820$, soit 0,008 au millième près.

3. La calculatrice donne $p(X \leqslant 14) \approx 0,7797$, donc $p(X \geqslant 15) = 1 - p(X \leqslant 14) \approx 1 - 0,7797 \approx 0,2203$ soit 0,220 au millième près.

EXERCICE 4 — 7 points

PARTIE A

On définit sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ la fonction g par :

$$g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \quad \text{où ln désigne la fonction logarithme népérien.}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. La fonction g somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$g'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$.

Or $x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$, donc le signe de $g'(x)$ est celui du numérateur le trinôme $x^2 - 2x + 2$.

2. On a $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 - 1 + 2 = (x-1)^2 + 1$.

Comme $(x-1)^2 + 1 \geqslant 1 > 0$, ce trinôme est donc supérieur à zéro pour tout $x > 0$: la fonction g est donc strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. • On a $\lim\limits_{x \to 0} -\frac{2}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

Par somme de limites on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

• On a $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{2}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Par somme de limites on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

4.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

La fonction g est continue sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ car dérivable sur cet intervalle et on a démontré que sur cet intervalle la fonction est croissante de moins l'infini à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$.

On a (calculatrice) $g(0,5) \approx -0,69$ et $g(1) = 1$, le même théorème permet d'affirmer que

$0,5 < \alpha < 1$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \ln x.$$

1. On admet que pour tout nombre réel $x > 0$, $f'(x) = \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$.

Produit de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f''(x) = \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right) + \mathrm{e}^x\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{x} + \ln x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = \mathrm{e}^x\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x\right)$.

2. On a donc $f''(x) = \mathrm{e}^x g(x)$.

3. **a.** Comme $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f''(x)$ est celui de $g(x)$ donné précédemment, soit

x	0		α		$+\infty$
$f''(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

b. On sait que si $f''(\beta) = 0$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse β.

Or $f''(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x g(x) = 0 \iff g(x) = 0 \iff x = \alpha$.

Rem. : la calculatrice donne $\alpha \approx 0,592$, puis $f(\alpha) \approx -0,948$. Le point A$(0,592~;~-0,948)$ est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

c. On a vu que sur sur l'intervalle $]0~;~\alpha]$, la dérivée seconde est négative : la fonction f est concave sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[\alpha~;~+\infty[$ la dérivée seconde est positive : la fonction f est convexe sur cet intervalle.

4. **a.**
- On a $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$;
- On a $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. On sait que $g(\alpha) = 0 \iff \dfrac{2}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha^2} + \ln\alpha = 0 \iff \ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{2}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha^2}(1-2\alpha)$.

Donc $f'(\alpha) = \mathrm{e}^\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha} + \ln\alpha\right) = \mathrm{e}^\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{2}{\alpha}\right) = \mathrm{e}^\alpha\left(\dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{1}{\alpha}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha^2}(1-\alpha)$.

c. On sait que $\mathrm{e}^\alpha > 0$, $\alpha^2 > 0$ et que $\alpha \approx 0,592 < 1$, donc $1 - \alpha > 0$. Donc $f'(\alpha) > 0$ comme produit de trois facteurs supérieurs à zéro.

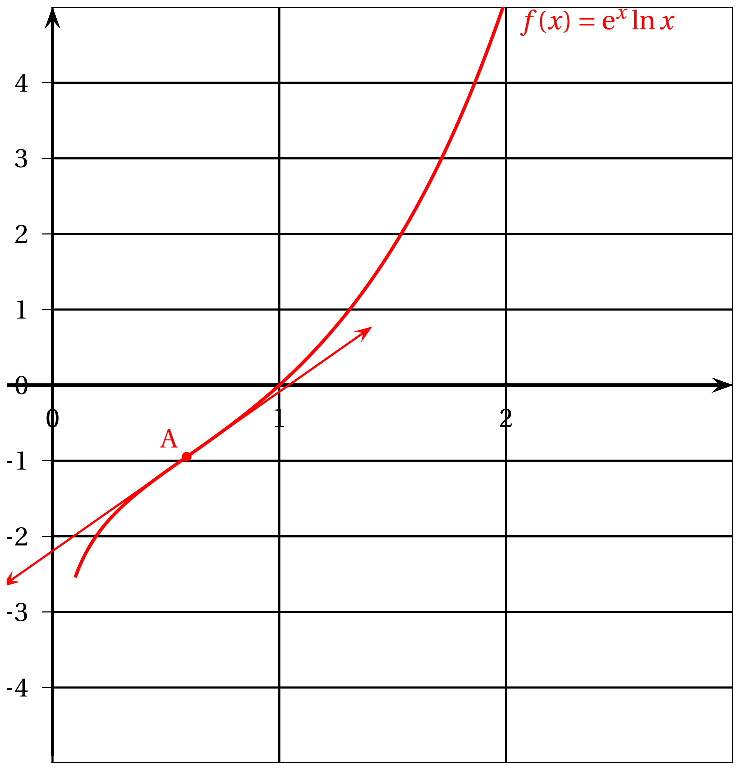
On a vu que $f''(x) = \mathrm{e}^x g(x)$, donc :

- sur $]0~;~\alpha]$, $g(x) < 0$, donc $\mathrm{e}^x g(x) = f''(x) < 0$: la fonction f' est décroissante sur cet intervalle;
- sur $]\alpha~;~+\infty[$, $g(x) > 0$, donc $\mathrm{e}^x g(x) = f''(x) > 0$: la fonction f' est croissante sur cet intervalle;
- Donc $f'(\alpha)$ est le minimum de la fonction f' sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

Ce minimum étant supérieur à zéro, on a donc $f'(x) > 0$ sur $]0~;~+\infty[$ et enfin la fonction f est strictement croissante de moins l'infini à plus l'infini.

d. On peut établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$:

x	0	α	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\approx -0,948$	0	$+\infty$


$f(x) = \text{e}^x \ln x$
A
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
1
2