∽ Corrigé du baccalauréat Centres étrangers [1] 22 mars 2023 ∾

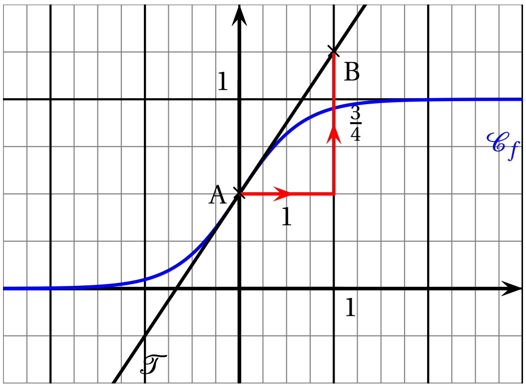
Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$



Partie A : lectures graphiques

1. Comme indiqué sur la figure pour aller de A en B points de la tangente : + 1 puis $+\frac{3}{4}$, donc coefficient directeur de $\frac{3}{4}$ et l'ordonnée à l'origine est égale à $\frac{1}{2}$.

   $M(x\,;\,y) \in \mathscr{T} \iff y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

2. La fonction semble être convexe sur $]-\infty\,;\,0]$ et concave sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B : étude de la fonction

1. En posant $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-3x}$, on a pour tout réel $u'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$.

   De $f(x) = \frac{1}{u(x)}$, on a donc $f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{-3\mathrm{e}^{-3x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2} = \frac{3\mathrm{e}^{-3x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2}$.

2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-3x} > 0$, donc $1+\mathrm{e}^{-3x} > 1 > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2 > 0$: tous les termes de la dérivée sont supérieurs à zéro ; on a donc $f'(x) > 0$, sur $\mathbb{R}$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Avec $X = -3x$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty$, d'où $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-3x} = 1$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$.

   Rem. la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de plus l'infini.

1. Europe

b. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-3x} = +\infty$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\mathrm{e}^{-3x}$ et enfin $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}} = 0$.
Rem. la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de moins l'infini.

4. On a $f(x) = 0,99 \iff \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}} = 0,99 \iff 1 = 0,99\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right) \iff 1 = 0,99+0,99\mathrm{e}^{-3x} \iff 0,01 = 0,99\mathrm{e}^{-3x} \iff \dfrac{0,01}{0,99} = \mathrm{e}^{-3x} \iff \dfrac{1}{99} = \mathrm{e}^{-3x}$.

Par croissance de la fonction logarithme népérien :

$\ln\left(\dfrac{1}{99}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{-3x}\right) \iff \ln 1 - \ln 99 = -3x \iff -\ln 99 = -3x \iff x = \dfrac{\ln 99}{3}$ (valeur approchée à la calculatrice 1,532).

Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On a $M(x\,;\,y) \in \mathscr{T} \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.

- $f(0) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$;
- $f'(0) = \dfrac{3}{(1+1)^2} = \dfrac{3}{4}$. Donc :

$M(x\,;\,y) \in \mathscr{T} \iff y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}(x-0) \iff y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$

2. Comme $9\mathrm{e}^{-3x} > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $\mathrm{e}^{-3x} - 1$:

- $\mathrm{e}^{-3x} - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^{-3x} = 1 \iff -3x = \ln 1 = 0 \iff \iff x = 0$;
- $\mathrm{e}^{-3x} - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^{-3x} > 1 \iff -3x > \ln 1 = 0 \iff \iff x < 0$;
- $\mathrm{e}^{-3x} - 1 < 0 \iff \mathrm{e}^{-3x} < 1 \iff -3x < \ln 1 = 0 \iff \iff x > 0$;

3. **a.** La question précédente a montré que la dérivée seconde est positive sur $]-\infty\,;\,0]$: la fonction f est convexe sur cet intervalle.

b. La dérivée seconde s'annule en $x = 0$ en changeant de signe, donc le point A de la courbe représentative d'abscisse 0 est le point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

c. En chacun de ses points la courbe $\mathscr{C}_f$ est convexe sur $]-\infty\,;\,0]$ donc au dessus de toutes les tangentes et en particulier en A la courbe est au dessus de la tangente en $x = 0$, donc en A, donc au dessus de $\mathscr{T}$.

De même en chacun de ses points la courbe $\mathscr{C}_f$ est concave sur $]0\,;\,+\infty]$ donc au dessous de toutes les tangentes et en particulier en A la courbe est au dessous de la tangente en $x = 0$, donc en A, donc au dessus de $\mathscr{T}$.

EXERCICE 2 — 5 points

Partie A

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

1. $\ln u$ est défini si $u > 0$, soit $1 + x > 0 \iff x > -1$.

   La fonction f est définie sur l'intervalle $]-1~;~+\infty[$.

2. En posant $u(x) = 1 + x$ et donc $u'(x) = 1$, on a alors si $f'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{u(x)} = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$.

3. **a.** On sait que $1 + x > 0$, donc le signe de la dérivée est celui de x :
   - $f'(x) = 0 \iff x = 0$;
   - $f'(x) > 0 \iff x > 0$: la fonction est croissante sur $[0~;~+\infty[$;
   - $f'(x) < 0 \iff x < 0$; la fonction est décroissante sur $[0~;~+\infty[$

   b. La fonction f est décroissante sur $]-1~;~0[$ puis croissante sur $[0~;~+\infty[$: elle a donc un minimum en x = 0, $f(0) = 0-0 = 0$. Son minimum étant nul, on a donc sur $]-1~;~+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$.

4. **a.** On sait que quel que soit le réel x, $x = \ln \mathrm{e}^x$. On peut donc écrire :
   $f(x) = \ln \mathrm{e}^x - \ln(1+x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right)$ par propriété de la fonction logarithme népérien :
   $\ln a - \ln b = \ln \dfrac{a}{b}$

   b. En posant $u = 1 + x \iff x = u - 1$, on a $f(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{u-1}}{u}\right) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^u \times \mathrm{e}^{-1}}{u}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\dfrac{\mathrm{e}^u}{u}\right)$.

   Or $x \to +\infty \implies x + 1 = u \to +\infty$ et on sait que $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^u}{u} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\dfrac{\mathrm{e}^u}{u}\right) = +\infty$ et enfin $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} f(u) = +\infty$ ou $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n).$$

1. Avec $n = 0$, la relation de récurrence donne : $u_1 = u_0 - \ln(1 + u_0) = 10 - \ln(1 + 10) = 10 - \ln 11 \approx 7{,}602$.

2. *Initialisation* : on a $u_0 = 10 \geqslant 0$: l'inégalité est vraie au rang 0.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 0$: d'après la question **3. a.** la fonction est croissante sur $[0~;~+\infty[$, donc $u_n < u_{n+1}$, mais comme par hypothèse $0 \leqslant u_n$ on a par transitivité $0 \leqslant u_n < u_{n+1}$, d'où $0 < u_{n+1}$: l'inégalité est vraie au rang $n + 1$.

   Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence :

   pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 0$.

3. On a $u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n) \iff u_{n+1} - u_n = -\ln(1 + u_n)$.

   Or on vient de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0 \implies 1 + u_n \geqslant 1$ puis par croissance de la fonction logarithme népérien $\ln(1 + u_n) \geqslant \ln 1$, soit $\ln(1 + u_n) \geqslant 0 \iff -\ln(1 + u_n) \leqslant 0$.

   Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ montre que la suite (u_n) est décroissante.

4. La suite (u_n) étant décroissante et minorée pae 0 converge vers une limite ℓ telle que $\ell \geqslant 0$

5. On a $u_{n+1} = f(u_n)$. On a vu que cette fonction est dérivable donc continue sur $]-1\ ;\ +\infty[$; de plus la suite (u_n) converge vers ℓ, donc à la limite :

$\ell = \ell - \ln(1+\ell) \iff \ln(1+\ell) = 0$ ou $\ln(1+\ell) = \ln 1 \iff 1+\ell = 1 \iff \ell = 0$.

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 3 **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points

$$\mathrm{A}(3\,;0\,;1),\qquad \mathrm{B}(2\,;1\,;2)\quad \text{et}\quad \mathrm{C}(-2\ ;\ -5\ ;\ 1).$$

1. On considère les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}-5\\-5\\0\end{pmatrix}$: ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires ; les trois points A, B et C définissent donc un plan noté (ABC).

2. On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1)\times(-5)+1\times(-5)+1\times 0 = 5-5+0 = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont orthogonaux, les droites (AB) et (AC) sont donc perpendiculaires en A et le triangle ABC est rectangle en A.

3. On a $\mathrm{A}(3\ ;\ 0\ ;\ 1) \in \mathrm{ABC} \iff -3+0-2+5 = 0$ égalité vraie ;

$\mathrm{B}(2\ ;\ 1\ ;\ 2) \in \mathrm{ABC} \iff -2+1-4+5 = 0$ égalité vraie ;

$\mathrm{A}(-2\ ;\ -5\ ;\ 1) \in \mathrm{ABC} \iff 2-5-2+5 = 0$ égalité vraie.

Les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation donnée : comme il n'existe qu'un plan contenant trois points distincts non alignés une équation du plan ABC est :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathrm{ABC} \iff -x+y-2z+5 = 0.$$

4. On considère le point $\mathrm{S}(1\ ;\ -2\ ;\ 4)$.

On sait qu'un vecteur normal au plan ABC a pour coordonnées les coefficients de x, y et z dans l'équation de ce plan. Donc on a $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

La droite (Δ) orthogonale au plan ABC a un vecteur directeur colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$.

Donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\Delta) \iff \overrightarrow{\mathrm{S}M} = t\,\overrightarrow{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$, ce qui se traduit par les équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& -t\\ y-(-2) &=& 1t\\ z-4 &=& -2t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t\\ y &=& -2+t\\ z &=& 4-2t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R} \iff M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\Delta).$$

5. On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

Le point commun à la droite (Δ) et au plan ABC a ses coordonnées qui vérifient les équations de Δ et l'équation du plan, soit le système :

$\begin{cases} x &= 1-t \\ y &= -2+t \\ z &= 4-2t \\ -x+y-2z+5 &= 0 \end{cases}$ En remplaçant x, y et z dans la dernière équation par leur valeur en fonction de t, on obtient :

$-(1-t)+(-2+t)-2(4-2t)+5=0 \iff -1+t-2+t-8+4t+5=0 \iff 6t-6=0 \iff t=1$
On a donc $x=1-1=0$, $y=-2+1=-1$, $z=4-2=2$, soit H$(0\,;\,-1\,;\,2)$.

6. On a $\text{SH}^2=(0-1)^2+(-1-(-2))^2+(2-4)^2=1+1+4=6$, donc $\text{SH}=\sqrt{6}$.

7. On considère le cercle $\mathscr{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathscr{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathscr{C}$.

   Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathscr{D}$. On a $\text{HB}^2=(-2)^2+(-2)^2+0^2=4+4=4\times 2$, d'où $\text{HB}=2\sqrt{2}$.

   L'aire du disque $\mathscr{D}$ est égale à $\mathscr{A}=\pi\times\text{HB}^2=8\pi$.

8. (SH) est perpendiculaire au plan ABC du disque, donc [SH] est la hauteur du cône et la base est le disque $\mathscr{D}$, donc :

   $\mathscr{V}=\dfrac{8\pi\times\sqrt{6}}{3}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
On choisit au hasard n pièces produites par la chaîne de fabrication.
Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.
Dans les trois questions suivantes, on prend $n=50$.

1. On a $p(X\geqslant 1)=1-p(X=0)=1-0,04^0\times 0,96^{50}\approx 1-0,1299\approx 0,8701$ soit 0,870 au millième près : réponse **b.**

2. La probabilité $p(3<X\leqslant 7)$ est égale à : $p(X\leqslant 7)-p(x\leqslant 3)\approx 0,9992-0,8609$ soit 0,1383. Réponse **b.**

3. Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 % ?

   La calculatrice donne $k=4$, réponse **c.**

   Dans les questions suivantes, n ne vaut plus nécessairement 50.

   a. Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses ?
   Réponse **a.**

   b. On considère la fonction Python ci-dessous. Que renvoie-t-elle ?
   La fonction donne le plus petit naturel n tel que $1-0,96^n\geqslant \text{x}$.
   Réponse **a.**