∽ Corrigé du baccalauréat Centres étrangers 14 mars 2023 ∾

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Pour ce QCM, aucune justification n'est demandée. On en fournit quand même dans ce corrigé.

1. **Réponse B.**

   F est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

   F est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = \text{e}^x$

   On a donc, pour tout réel x, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \text{e}^x$

   $F = u' \times v + v' \times u$ donc, pour tout réel x, $F'(x) = \text{e}^x + (x-1)\text{e}^x = x\text{e}^x = f(x)$.

   Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. **Réponse D.**

   Par lecture graphique : $f(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$ et $f(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

   D'après l'énoncé : le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse 3 donc $f'(x) > 0$ sur $]0\,;\,3[$ et $f'(x) < 0$ sur $]3\,;\,+\infty[$.

   D'après l'énoncé : le point d'abscisse 5 est le seul point d'inflexion, de plus, par lecture graphique, la fonction est concave puis convexe donc : $f''(x) < 0$ sur $]0\,;\,5[$ et $f''(x) > 0$ sur $]5\,;\,+\infty[$.

   Pour tout $x \in]5\,;\,+\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

3. **Réponse D.**

   Pour tout réel positif t, $g(t) = \dfrac{a}{b + \text{e}^{-t}}$.

   D'une part $g(0) = \dfrac{a}{b + \text{e}^0} = \dfrac{a}{b+1} = 2$ donc $\dfrac{a}{b+1} = 2 \iff a = 2(b+1) = 2b+2$.

   D'autre part :

   $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} -t = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X \to -\infty} \text{e}^X = 0$, donc, par composition, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \text{e}^{-t} = 0$

   d'où, par somme, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} b + \text{e}^{-t} = b$

   et donc, par quotient $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \dfrac{a}{b + \text{e}^{-t}} = \dfrac{a}{b}$

   d'où $\dfrac{a}{b} = 3 \Leftrightarrow a = 3b$

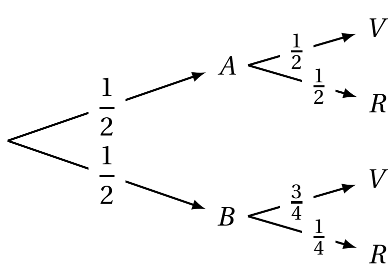
   On a donc $a = 2b + 2 = 3b$ d'où $b = 2$ et $a = 3 \times 2 = 6$

4. **Réponse C.**

   Soient :

   - A l'évènement « Alice choisit l'urne A »
   - B l'évènement « Alice choisit l'urne B »
   - V l'évènement « Elle obtient une boule verte »
   - R l'évènement « Elle obtient une boule rouge »

   La situation peut être représentée à l'aide de l'arbre ci-contre :



On cherche la probabilité $P_V(B)$.

$P(\text{V}\cap B) = P(B) \times P_B(V) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{8}$

Les évènements A et B partitionnant l'univers, la loi des probabilités totales donne :

$P(V) = P(V\cap A) + p(V\cap B) = P(A) \times P_A(V) + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{2}{8} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{5}{8}$

$P_V(B) = \dfrac{P(V\cap B)}{P(V)} = \dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \dfrac{3}{5}$.

5. **Réponse B.**

   On cherche l'algorithme qui permet de calculer la somme des 100 premiers termes de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$.

   La somme S (et pas le compteur k) doit être initialisée à 0 donc ce ne sont pas les réponses c. ou d.

   La somme S doit être incrémentée du terme suivant, ceci est réalisé par l'algorithme b.

EXERCICE 2 6 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]1,5\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x = \ln(2x+3) - 1 - x$.

1. $\lim\limits_{x\to -1,5^+} 2x+3 = 0^+$ ($x > 1,5$ donc $2x+3 > 0$)

   or $\lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to 1,5} \ln(2x+3) = -\infty$

   de plus, $\lim\limits_{x\to -1,5} -1-x = -2,5$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to 1,5} g(x) = -\infty$.

2. g est dérivable sur $]-1,5\,;\,+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.

   g est de la forme $\ln(u) + v$ avec $u(x) = 2x-3$ et $v(x) = -1-x$. On a donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -1$.

   $g' = \dfrac{u'}{u} + v'$ donc, pour tout réel $x \in]-1,5\,;\,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2}{2x+3} - 1 = \dfrac{2-2x-3}{2x-3} = \dfrac{-2x-1}{2x-3}$.

   Sur l'intervalle $]-1,5\,;\,+\infty[$, $2x+3$ est strictement positif donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $-2x-1$: c'est donc strictement positif sur l'intervalle $]-1,5\,;\,-0,5[$ et strictement négatif sur l'intervalle $]-0,5\,;\,+\infty[$.

   g est donc strictement croissante sur l'intervalle $]-1,5\,;\,-0,5[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]-0,5\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Sur l'intervalle $]-0,5\,;\,+\infty[$, la fonction g est une fonction continue (car dérivable) et strictement décroissante.

   $g(-0,5) = \ln(2\times(-0,5)+3) - 1 - 0,5 = \ln(2) - 1,5 \approx -0,80$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, donc 0 est une valeur intermédiaire entre $g(-0,5)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

   En vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0,5\,;\,+\infty[$.

   b. $g(0,25) \approx 0,003 > 0$ et $g(0,26) \approx -0,002 < 0$ donc $0,25 \leqslant \alpha \leqslant 0,26$.

Partie B

1. f est croissante sur l'intervalle $]-1,5\,;\,+\infty[$ et donc en particulier sur l'intervalle $[-1\,;\alpha]$.

Donc $-1 \leqslant x \leqslant \alpha \Longrightarrow f(-1) \leqslant f(x) \leqslant f(\alpha)$.

Or $g(\alpha) = 0 = f(\alpha) - \alpha$ donc $f(\alpha) = \alpha$ et $f(-1) = \ln(2 \times (-1) + 3) - 1 = \ln(1) - 1 = -1$

donc $-1 \leqslant f(x) \leqslant \alpha$, c'est à dire $f(x) \in [-1\,;\,\alpha]$.

2. **a.** *Initialisation :* à l'indice $n = 0$:

On a $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) = f(0) = \ln(3) - 1 \approx 0,099$ donc $-1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$.

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que, pour un entier naturel n donné, l'inégalité $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ est vraie. Montrons que l'inégalité sera vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence :

$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

$\Longrightarrow\ f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$ car f est croissante sur $[-1\,;\,\alpha]$

$\Longrightarrow\ -1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$ car $f(-1) = -1$ et $f(\alpha) = \alpha$

Si l'inégalité est vérifiée à l'indice n, alors, elle l'est aussi au rang suivant.

Conclusion : L'inégalité est vérifiée à l'indice 0 et sa véracité est héréditaire pour tout indice n naturel, donc, par principe de récurrence, on a $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ pour tout entier naturel n.

b. On vient d'établir que :

pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \alpha$ donc la suite est majorée par α

et pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite est croissante,

elle est donc convergente.

EXERCICE 3 6 points

1. **a.** Dans le repère $\left(A\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on a les points suivants :

H(0 ; 2 ; 2), M(3 ; 0 ; 1) et N(3 ; 1 ; 1).

b. On a $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x_M - x_H \\ y_M - y_H \\ z_M - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (HM) est dirigée par $\overrightarrow{HM}$ et elle passe par H, elle admet donc comme représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = x_H + t x_{\overrightarrow{HM}} \\ y = y_H + t y_{\overrightarrow{HM}} \\ z = z_H + t z_{\overrightarrow{HM}} \end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\left\{\begin{array}{l} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$

2. Dans le repère $\left(A\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on a les coordonnées suivantes :

B(2 ; 0 ; 0) C(2 ; 2 ; 0) F(2 ; 0 ; 2)

Le plan (BCF) est parallèle au plan yOz, son équation est donc de la forme $x = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ici on a donc $x = 2$

Cherchons le paramètre t tel qu'un point M_t de paramètre t dans la représentation de (HM) soit un point de (BCF) :

$$\begin{aligned} M_t \in (\text{BCF}) &\iff x_{M_t} = 2 \\ &\iff 3t = 2 \\ &\iff t = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

P est donc $M_{\frac{2}{3}}$ sur la droite (HM), il a donc comme coordonnées :

$x_P = 2$, $y_P = 2 - 2 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{3} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3}$ et $z_P = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Cela confirme $\text{P}\left(2\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$

3. **a.** $\overrightarrow{\text{PM}}\begin{pmatrix} x_\text{M} - x_\text{P} \\ y_\text{M} - y_\text{P} \\ z_\text{M} - z_\text{P}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0 - \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{4}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et de même : $\overrightarrow{\text{PN}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on peut calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées :

$\overrightarrow{\text{PM}} \cdot \overrightarrow{\text{PN}} = 1 \times 1 - \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) = 1 - \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$

b. $\text{PM} = \sqrt{1^2 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9}} = \sqrt{\dfrac{14}{9}} = \dfrac{\sqrt{14}}{3}$

c. On sait que $\overrightarrow{\text{PM}} \cdot \overrightarrow{\text{PN}} = PM \times PN \times \cos\left(\widehat{MPN}\right)$.

On a donc $\dfrac{8}{9} = \dfrac{\sqrt{14}}{9} \times \dfrac{\sqrt{11}}{9} \times \cos\left(\widehat{MPN}\right)$.

d'où $\cos\left(\widehat{MPN}\right) = \dfrac{8}{\sqrt{11}\sqrt{14}}$ soit $\widehat{MPN} \approx 50°$.

L'angle ne dépasse pas 55°, le toit peut donc être construit.

4. Les droites (EH) et (MN) sont parallèles donc les droites (HM) et (EN) sont coplanaires et non parallèles , elles sont donc sécantes.

On a $\overrightarrow{\text{EN}}\begin{pmatrix} x_\text{N} - x_\text{E} \\ y_\text{N} - y_\text{E} \\ z_\text{N} - z_\text{E}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1\end{pmatrix}$

La droite (EN) est dirigée par $\overrightarrow{\text{EN}}$ et elle passe par E, elle admet donc comme représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = x_\text{E} + t x_{\overrightarrow{\text{EN}}} \\ y = y_\text{E} + t y_{\overrightarrow{\text{EN}}} \\ z = z_\text{E} + t z_{\overrightarrow{\text{EN}}}\end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\left\{\begin{array}{l} x = 3t' \\ y = t' \\ z = 2 - t'\end{array}\right.$ $t' \in \mathbb{R}$

Pour trouver l'intersection des droites (EH) et (MN), il faut donc résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 3t = 3t' \\ 2 - 2t = t' \\ 2 - t = 2 - t'\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t = t' \\ 2 - 2t = t \\ 2 - t = 2 - t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t = t' \\ 2 = 3t \\ 0 = 0\end{array}\right. \iff t = t' = \dfrac{2}{3}$$

Le point d'intersection est donc le point P.

EXERCICE 4 3 points

Vérifions d'abord la condition 1 portant sur la première phase.
Nous avons :

- une expérience à deux issues (le candidat est qualifié), le succès est « être qualifié », a une probabilité $p = 0,6$;
- cette expérience est répétée quatre fois (quatre candidats) de façon identique et indépendante, donc $n = 4$ répétitions;
- dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0,6$, on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Avec ces éléments, on peut dire que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(4\ ;\ 0,6)$.
La condition 1 « la deuxième phase doit avoir lieu dans 80% des cas » correspond à l'évènement « au moins deux candidats sont sélectionnés » a une probabilité supérieure ou égale à 0,8 (c'est à dire correspond à $P(X \geqslant 2) \geqslant 0,8$.
Avec la calculatrice : $P(X \geqslant 2) \approx 0,821$.
On a donc bien : $P(X \geqslant 2) \geqslant 0,8$, la condition 1 est donc vérifiée.

Pour la condition 2 :
Soit T la variable aléatoire donnant la durée de la deuxième phase.
Les valeurs prises par T sont : 0, 5, 9 et 11.
La deuxième phase dure 11 minutes lorsque quatre candidats sont sélectionnés donc
$P(T = 11) = P(X = 4) = \binom{4}{4} \times 0,6^4 \times 0,4^0 = 0,6^4 = 0,1296$.
De même :
$P(T = 9) = P(X = 3) = \binom{4}{3} \times 0,6^3 \times 0,4^1 = 0,3456$.
$P(T = 5) = P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,6^2 \times 0,4^2 = 0,3456$.
$P(T = 0) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{4}{0} \times 0,6^0 \times 0,4^4 + \binom{4}{1} \times 0,6^1 \times 0,4^3 = 0,0256 + 0,1536 = 0,1792$
On peut résumer les résultats dans le tableau de la loi de probabilité de la loi T :

t_i	0	5	9	11
$P(T = t_i)$	0,1792	0,3456	0,3456	0,1296

La durée moyenne du jeu correspond à l'espérance de la variable aléatoire T.
$E(T) = 0 \times P(T = 0) + 5 \times P(T = 5) + 9 \times P(T = 9) + 11 \times P(T = 11)$
$E(T) = 0 + 5 \times 0,3456 + 9 \times 0,3456 + 11 \times 0,1296 = 6,264$
La durée moyenne du jeu est donc supérieur à 6 minutes, la deuxième condition n'est pas vérifiée, le jeu ne peut donc pas être retenu.