Corrigé du baccalauréat Centres étrangers 13 mars 2023

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 5 points

Pour ce QCM, aucune justification n'est demandée. On en fournit quand même dans ce corrigé.

1. **Réponse c.**

   Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+2^n}{3+5^n} = \dfrac{2^n \times \left(\frac{1}{2^n}+1\right)}{5^n \times \left(\frac{1}{5^n}+1\right)} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n \dfrac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

   Or, les nombres : $\dfrac{2}{5}$; $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{5}$ étant tous strictement compris entre -1 et 1, on en déduit que les suites géométriques ayant ces nombres pour raison convergent vers 0.

   Par limite de somme et de quotient, on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n} = 1$, puis, par limite du produit :

   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n \dfrac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n} = 0$

2. **Réponse b.**

   f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$, en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout x réel strictement positif, on a :

   $f'(x) = 2x \times \ln(x) + x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x\ln(x) + x = x\big(2\ln(x)+1\big)$.

3. **Réponse a.**

   La stricte croissance de h sur $\mathbb{R}$ et le fait que $h(1) = 0$ permettent de dire que :

   $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < 1 \implies h(x) < 0$.

   La fonction H étant une primitive de h sur $\mathbb{R}$, cela équivaut à dire que h est la fonction dérivée de H, et donc H a une dérivée négative sur $]-\infty~;~1[$. H est donc décroissante sur cet intervalle.

   Cela implique donc que, pour tout x réel inférieur à 0, x et 0 seront dans $]-\infty~;~1[$ et donc :

   $x \leqslant 0 \implies H(x) \geqslant H(0)$, or, comme H s'annule en 0, cela signifie que $H(0) = 0$.

   Finalement, on a : $x \leqslant 0 \implies H(x) \geqslant 0$: H est bien à valeurs positives sur $]-\infty~;~0[$.

4. **Réponse d.**

   On cherche la fonction qui met en œuvre l'algorithme de dichotomie.

   On peut tout de suite éliminer les propositions **b.** et **c.** : la valeur au centre de l'intervalle $[a~;~b]$ n'est calculée qu'une fois, et n'est pas réactualisée.

   De plus, pour la proposition **c.**, le test de la boucle "while" est incorrect : il provoque un arrêt quand l'amplitude de l'intervalle d'encadrement dépasse 0,001.

   Reste à trancher entre les propositions **a.** et **d.**, qui sont quasi identiques, à l'exception des actualisations des variables a et b.

   Reprenons la situation : f est continue, et strictement croissante sur $[a~;~b]$ et elle s'annule en un réel α. On a donc par croissance de f : $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

   m est la valeur au centre de l'intervalle $[a~;~b]$, si on a $f(m) < 0$, alors cela veut dire que $f(a)$ et $f(m)$ sont strictement négatifs tous les deux, et donc c'est sur l'intervalle $[m~;~b]$ que l'on peut appliquer le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, et donc le nombre α se trouve entre m et b, donc l'étape suivante de l'algorithme doit se faire entre m et b, donc on reprendra la même démarche, en gardant la valeur b dans la variable b, et en mettant la valeur m dans la variable a.

C'est la proposition **d.** qui fait cela, et pas la proposition **a.**.

5. Réponse d.

Ici, nous avons :

- une expérience à deux issues (choisir une boule dans l'urne), le succès est « obtenir une boule verte », de probabilité $p = \dfrac{3}{10}$;
- cette expérience est répétée trois fois (trois tirages) de façon identique et indépendante (tirages avec remise), donc $n = 3$ répétitions ;
- dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{3}{10}$, on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Avec ces éléments, on peut dire que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(3\,;\,\dfrac{3}{10}\right)$.

L'évènement « obtenir deux boules vertes » correspond à $(X = 2)$ dans ce contexte, et par propriété, on a :

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \times p^2 \times (1-p)^{3-2} = \binom{3}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{7}{10}\right) = \binom{3}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2.$$

EXERCICE 2 6 points

Partie A

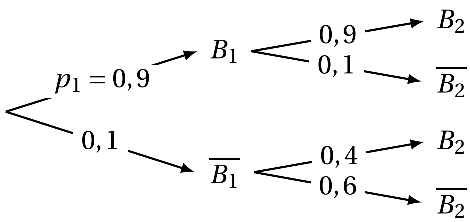
Interprétons l'énoncé :

si n est un entier naturel, la phrase « lorsque la trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est 0,9 » correspond à : $P_{B_n}(B_{n+1}) = 0,9$.

la phrase suivante se traduit par : $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = 0,4$.

1. On a donc $p_1 = P(B_1) = P(B_0) \times P_{B_0}(B_1) = 1 \times 0,9 = 0,9$. On a $p_1 = 0,9$.

Pour déterminer p_2, traçons un arbre :

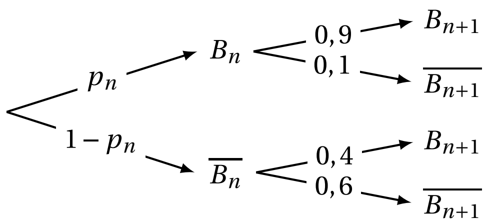


Les évènements B_1 et $\overline{B_1}$ partitionnant l'univers, la loi des probabilités totales donne :

$p_2 = P(B_2) = P\left(B_1 \cap B_2\right) + P\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 = 0,81 + 0,04 = 0,85.$

Ce calcul confirme bien que l'on a : $p_2 = 0,85$.

2. On va donc avoir un arbre très similaire au précédent : les probabilités conditionnelles restant les mêmes.



3. Là encore, les évènements B_n et $\overline{B_n}$ partitionnent l'univers, la loi des probabilités totales donne :

$p_{n+1} = P(B_{n+1}) = P\left(B_n \cap B_{n+1}\right) + P\left(\overline{B_n} \cap B_{n+1}\right) = p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,4 = 0,9p_n + 0,4 - 0,4p_n$

Donc on a bien $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$: on a donc bien établi la relation de récurrence annoncée.

4. **a.** *Initialisation :* à l'indice $n = 0$, on a $p_0 = 0,9$ donc l'inégalité $u_0 \geqslant 0,8$ est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que, pour un entier naturel n donné, l'inégalité $u_n \geqslant 0,8$ est vraie. Montrons que l'inégalité sera vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence : $u_n \geqslant 0,8 \implies 0,5u_n \geqslant 0,4 \quad$ car $0,5 > 0$

$$\implies 0,5u_n + 0,4 \geqslant 0,4 + 0,4$$

$$\implies u_{n+1} \geqslant 0,8$$

Si l'inégalité est vérifiée à l'indice n, alors, elle l'est aussi au rang suivant.

Conclusion : l'inégalité est vérifiée à l'indice 0 et sa véracité est héréditaire pour tout indice n naturel, donc, par principe de récurrence, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0,8.$

Autrement dit, on vient d'établir que la suite est minorée par 0,8.

b. En assimilant les probabilités à des proportions, l'entreprise peut communiquer en annonçant qu'au moins 80 % de son parc de trottinettes est toujours en bon état.

5. **a.** Établissons la relation de récurrence de la suite (u_n). Soit n un entier naturel :

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 \quad$ par définition de la suite (u_n)

$= (0,5p_n + 0,4) - 0,8 \quad$ par la relation de récurrence de la suite (p_n)

$= 0,5p_n - 0,4$

$= 0,5(p_n - 0,8)$

$= 0,5u_n \quad$ par définition de la suite (u_n)

La relation de récurrence de la suite (u_n) est donc bien celle d'une suite géométrique, de raison $q = 0,5$.

Le premier terme de la suite est $u_0 = p_0 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$.

b. On peut donc donner la forme explicite du terme général de la suite géométrique :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n = 0,2 \times 0,5^n.$

On en déduit : $p_n = u_n + 0,8 \iff u_n = p_n - 0,8 = 0,2 \times 0,5^n - 0,8$, ou $p_n = 0,2 \times 0,5^n + 0,8$.

c. La raison de la suite géométrique u est comprise entre -1 et 1, strictement, donc la suite (u_n) converge vers 0.

Par limite de la somme, on en déduit que la suite p converge vers $0,8$.

Partie B

1. Ici, nous avons :

- une expérience à deux issues (choisir une trottinette dans le parc de l'entreprise), le succès est « choisir une trottinette en bon état », de probabilité $p = 0,8$;
- cette expérience est répétée quinze fois (on constitue un lot de 15 trottinettes) d'une façon assimilable à une répétition identique et indépendante (le prélèvement des 15 trottinettes est assimilable à un tirage avec remise), donc $n = 15$ répétitions ;
- dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 15$ et $p = 0,8$, on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès (le nombre de trottinettes en bon état dans le lot).

Avec ces éléments, on peut dire que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(15\ ;\ 0,8)$.

2. La probabilité demandée est $P(X=15)$. Par propriété, on a :

$P(X=15)=\binom{15}{15}\times 0,8^{15}\times 0,2^{0}=0,8^{15}$.

La probabilité que les quinze trottinettes soient en bon état est donc de $0,8^{15}$ (ici, le sujet ne précise pas de consigne d'arrondi, donc on donne la valeur exacte. La valeur approchée au dix-millième près est 0,0352).

3. La probabilité demandée est $P(X\geqslant 10)$.

Selon le modèle de calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de ce résultat directement, ou alors on a recours à : $P(X\geqslant 10)=1-P(X<10)=1-P(X\leqslant 9)$.

La calculatrice donne une valeur approchée au dix-millième près qui est 0,9389.

4. Pour une variable aléatoire suivant la loi binomiale, on a $E(X)=np=15\times 0,8=12$ (cette justification n'était pas attendue, ici).

Cela s'interprète en disant qu'en moyenne, sur un lot de quinze trottinettes choisies dans le parc de cette entreprise, douze d'entre elles seront en bon état.

EXERCICE 3 6 points

1. Dans le repère $\left(\mathrm{A}\,;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\right)$, on a les coordonnées suivantes pour les sommets du prisme droit :

A(0 ; 0 ; 0)	B(4 ; 0 ; 0)	C(4 ; 4 ; 0)	D(0 ; 4 ; 0)
E(0 ; 0 ; 8)	F(4 ; 0 ; 4)	G(4 ; 4 ; 4)	H(0 ; 4 ; 8)

I étant le milieu de [EF], on a $\mathrm{I}\left(\dfrac{x_{\mathrm{E}}+x_{\mathrm{F}}}{2}\ ;\ \dfrac{y_{\mathrm{E}}+y_{\mathrm{F}}}{2}\ ;\ \dfrac{z_{\mathrm{E}}+z_{\mathrm{F}}}{2}\right)$, soit I(2 ; 0 ; 6).

J étant le milieu de [AE], on a de même : J(0 ; 0 ; 4).

2. a. Si le plan est nommé (IGJ), cela signifie que les trois points I, G et J définissent le plan, et donc sont non alignés.

On a : $\overrightarrow{\mathrm{IG}}\begin{pmatrix}x_{\mathrm{G}}-x_{\mathrm{I}}\\ y_{\mathrm{G}}-y_{\mathrm{I}}\\ z_{\mathrm{G}}-z_{\mathrm{I}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$ et de même : $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on peut calculer les produits scalaires à l'aide des coordonnées :

- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IG}}=-1\times 2+1\times 4+1\times(-2)=-2+4-2=0$: $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{IG}}$.
- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IJ}}=-1\times(-2)+1\times 0+1\times(-2)=2+0-2=0$: $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$.

Ainsi, $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IGJ) : c'est donc un vecteur normal au plan.

b. Une équation cartésienne d'un plan dont $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal est de la forme : $-1\times x+1\times y+1\times z+d=0$, soit $-x+y+z+d=0$, où d est un réel quelconque.

Comme G est un point du plan (IGJ), on en déduit que la constante d dans ce cas doit être telle que :

$$\begin{aligned}-x_{\mathrm{G}}+y_{\mathrm{G}}+z_{\mathrm{G}}+d=0 &\iff -4+4+4+d=0\\ &\iff d=-4\end{aligned}$$

Une équation de (IGJ) est donc : $-x+y+z-4=0$.

3. Si d est perpendiculaire à (IGJ), alors elle est dirigée par $\overrightarrow{n}$, comme elle passe par H, elle admet comme représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = x_{\text{H}} + tx_{\overrightarrow{n}} \\ y = y_{\text{H}} + ty_{\overrightarrow{n}} \\ z = z_{\text{H}} + tz_{\overrightarrow{n}} \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\left\{\begin{array}{l} x = -t \\ y = 4 + t \\ z = 8 + t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$

4. Si L est le projeté orthogonal de H sur (IGJ), cela veut dire que la droite (HL) est orthogonale au plan (et passe par H), et donc que la droite (HL) est la droite d. Comme L est un point du plan, c'est donc le seul point de d sur le plan.

Cherchons le paramètre t tel qu'un point M_t de paramètre t dans la représentation de d soit un point de (IGJ) :

$$\begin{aligned} M_t \in (\text{IGJ}) &\iff -x_{M_t} + y_{M_t} + z_{M_t} - 4 = 0 \\ &\iff -(-t) + (4+t) + (8+t) - 4 = 0 \\ &\iff 3t + 8 = 0 \\ &\iff t = \frac{-8}{3} \end{aligned}$$

L est donc $M_{\frac{-8}{3}}$ sur la droite d : il a donc comme coordonnées $\text{L}\left(-\frac{-8}{3}\ ;\ 4 + \frac{-8}{3}\ ;\ 8 + \frac{-8}{3}\right)$.

Cela confirme $\text{L}\left(\frac{8}{3}\ ;\ \frac{12-8}{3}\ ;\ \frac{24-8}{3}\right)$

Autrement dit, le point L est bien le point de coordonnées $\left(\frac{8}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\ ;\ \frac{16}{3}\right)$.

5. Par définition, la distance d'un point à un plan est la distance entre le point et son projeté orthogonal sur le plan, donc on cherche HL. Comme on travaille dans un repère orthonormé :

$$\text{HL} = \sqrt{(x_{\text{L}} - x_{\text{H}})^2 + (y_{\text{L}} - y_{\text{H}})^2 + (z_{\text{L}} - z_{\text{H}})^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{192}{9}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

La distance de H au plan (IGJ) est donc de $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

6. Calculons : $\overrightarrow{\text{IG}} \cdot \overrightarrow{\text{IJ}} = 2 \times (-2) + 4 \times 0 + (-2) \times < IMG_0 491.jpg > (-2) = -4 + 0 + 4 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{IG}}$ et $\overrightarrow{\text{IJ}}$ sont donc orthogonaux (et non nuls) donc les droites qu'ils dirigent, (IG) et (IJ) sont orthogonales (et perpendiculaires, car sécantes en I) : le triangle IGJ est donc rectangle en I.

7. Pour calculer le volume, on choisira IGJ comme base (car le triangle étant rectangle, son aire est simple à calculer) et donc la hauteur correspondante est la distance du quatrième sommet (H) au plan (IGJ) (distance qui a été calculée à la question **5.**).

$\text{IG} = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$\text{IJ} = \sqrt{(-2)^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

L'aire du triangle IGJ est donc : $\mathscr{A}_{\text{IGJ}} = \frac{\text{IG} \times \text{IJ}}{2} = \frac{2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Le volume du tétraèdre est donc : $V = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{32}{3}$.

Le volume du tétraèdre est de $V = \frac{32}{3}$ (soit environ 10,7, au dixième près).

EXERCICE 4 3 points

Affirmation 1 : Fausse
Étudions les variations de la fonction f.
f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout t réel positif, on pose : $u(t) = -0,5t^2 + t + 2$, donc on a $u'(t) = -t + 1$.
On a donc, pour tout réel t positif : $f'(t) = 0 - (-t+1)\mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2} = (t-1)\mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2}$
La fonction exp étant à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, le signe de $f'(t)$ est le signe de $(t-1)$: c'est donc strictement négatif sur l'intervalle $[0\ ;\ 1[$ et strictement positif sur $]1\ ;\ +\infty[$.
f est donc strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$: c'est pourquoi il est faux de dire que la population augmente en permanence : au cours de la première heure, la population décroit, strictement.

Affirmation 2 : Fausse
La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, donc :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}^+,\quad \mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2} > 0 &\Longrightarrow -\mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2} < 0\\ &\Longrightarrow \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2} < \mathrm{e}^3\\ &\Longrightarrow f(t) < \mathrm{e}^3\end{aligned}$$

Or $\mathrm{e}^3 \approx 20,086$ (à 10^{-3} près, arrondi par excès), donc la fonction f est majorée par 20,086, ce qui s'interprète en disant que la population restera inférieure à 20,086 milliers d'individus, soit 20 086 bactéries : la population ne dépassera donc jamais 21 000.

Affirmation 3 : Vraie
Une population de bactéries de 10 000 individus à l'instant t, c'est équivalent à avoir $f(t) = 10$.
On cherche donc à savoir combien d'antécédents 10 a par la fonction f.
En reprenant l'étude des variations de f : on a établi que f était strictement décroissante sur $[0\ ;\ 1]$, puis strictement croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.
Étudions la limite de f en $+\infty$.
$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -0,5t^2 + t + 2 = \lim_{t\to+\infty} -0,5t^2\left(1 - \frac{2}{t} - \frac{4}{t}\right) = -\infty$, par limite de quotient, somme et produit de suites de références.
Par composition, en posant $y = -0,5t^2 + t + 2$, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2} = \lim_{y\to-\infty} \mathrm{e}^y = 0$
Finalement, par limite de la somme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = \mathrm{e}^3$.
Pour rappel, on a $\mathrm{e}^3 \approx 20,086 > 10$.
Par ailleurs : $f(0) = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^2 \approx 12,696 > 10$ et $f(1) = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{2,5} \approx 7,903 < 10$.
On peut donc dire :

- Sur $[0\ ;\ 1]$, f est une fonction continue (car dérivable), et strictement décroissante, et 10 est une valeur intermédiaire entre $f(0)$ et $f(1)$, donc en vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(t) = 10$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

- Sur $]1\ ;\ +\infty[$, f est une fonction continue (car dérivable), et strictement croissante, et 10 est une valeur intermédiaire strictement comprise entre $\displaystyle\lim_{t\to1} f(t) = f(1)$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$, donc en vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(t) = 10$ admet une unique solution sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

Finalement, l'équation $f(t) = 10$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}^+$ et donc il y a exactement deux instants où la population de bactéries aura un effectif de 10 000 individus.