∽ Corrigé du baccalauréat Amérique du Nord - 28 mars 2023 ∾

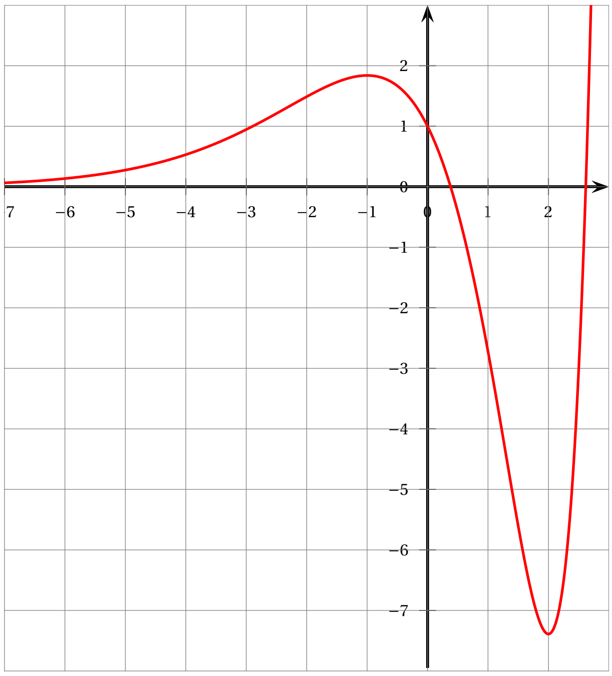
Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est donné par le signe de la dérivée f'.
   - Sur $]-\infty\,;\,0{,}4[$, $f' > 0$ donc f est strictement croissante.
   - Sur $]0{,}4\,;\,2{,}6[$, $f' < 0$ donc f est strictement décroissante.
   - Sur $]2{,}6\,;\,+\infty[$, $f' > 0$ donc f est strictement croissante.
2. La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels la dérivée f' est croissante, soit sur $]-\infty\,;\,-1[$ et sur $]2\,;\,+\infty[$.

Partie B

On admet que la fonction f de la partie **A** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - 5x + 6\right)\text{e}^x$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1. **a.** On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-5x+6\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\text{e}^x = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(x^2-5x+6\right)\text{e}^x = +\infty$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

   b. On détermine la limite de la fonction f en $-\infty$.

Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2}\right)\text{e}^x = x^2\text{e}^x\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x = 0\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)=1\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)=0$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$f'(x) = (2x-5)\,\mathrm{e}^x + \left(x^2-5x+6\right)\times\mathrm{e}^x = \left(2x-5+x^2-5x+6\right)\mathrm{e}^x = \left(x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^x$

3. Pour déterminer le sens de variation de la fonction f, on étudie le signe de $f'(x)$.
Pour tout x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de x^2-3x+1.
$\Delta = (-3)^2 - 4\times 1\times 1 = 5 > 0$; $x' = \dfrac{-(-3)-\sqrt{5}}{2\times 1} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x'' = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2-3x+1		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		croissante		décroissante		croissante	

4. La tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation réduite :
$y = f'(0)\,(x-0) + f(0)$.
- $f(x) = \left(x^2-5x+6\right)\mathrm{e}^x$ donc $f(0) = 6\mathrm{e}^0 = 6$
- $f'(x) = \left(x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^x$ donc $f'(0) = 1\mathrm{e}^0 = 1$

$\mathscr{T}$ a pour équation réduite $y = 1\,(x-0)+6$ soit $y = x+6$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. On admet que, pour tout réel x, on a $f''(x) = (x+1)(x-2)\mathrm{e}^x$.

5. **a.** Pour étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$, on étudie le signe de $f''(x)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		convexe		concave		convexe	

b. Sur $[-1\,;\,2]$, la fonction f est concave donc la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de ses tangentes, et en particulier en dessous de la tangente $\mathscr{T}$ car $0 \in [-1\,;\,2]$.
Donc, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,2]$, on a $f(x) \leqslant x+6$.

EXERCICE 2 — 5 points

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.
En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.
On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023. L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1\,700$ et $b_0 = 1\,300$.
Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

— durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;

— chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;

— chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. D'après le texte :

- $a_1 = a_0 - \dfrac{15}{100}a_0 + \dfrac{10}{100}b_0 = 1\,700 - 255 + 130 = 1\,575$
- $b_1 = b_0 - \dfrac{10}{100}b_0 + \dfrac{15}{100}a_0 = 1\,300 - 130 + 255 = 1\,425$

2. Comme on suppose que durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe, on a, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n = 3\,000$.

3. D'après le texte, on a : $a_{n+1} = a_n - \dfrac{15}{100}a_n + \dfrac{10}{100}b_n$.

Or $a_n + b_n = 3\,000$ donc $b_n = 3\,000 - a_n$. On a alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100}(3\,000 - a_n) = a_n - \frac{15}{100}a_n + \frac{10}{100} \times 3\,000 - \frac{10}{100}a_n \\ &= a_n - \frac{25}{100}a_n + 300 = \frac{75}{100}a_n + 300 = 0{,}75a_n + 300 \end{aligned}$$

4. **a.** Soit la propriété : $1\,200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1\,700$.

- **Initialisation**

  $a_0 = 1\,700$ et $a_1 = 1\,575$ donc $1\,200 \leqslant a_1 \leqslant a_0 \leqslant 1\,700$

  Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang n, soit $1\,200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1\,700$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  $1\,200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1\,700$

  $\iff 0{,}75 \times 1\,200 \leqslant 0{,}75 \times a_{n+1} \leqslant 0{,}75 \times a_n \leqslant 0{,}75 \times 1\,700$

  $\iff 900 \leqslant 0{,}75 \times a_{n+1} \leqslant 0{,}75 \times a_n \leqslant 1\,275$

  $\iff 900 + 300 \leqslant 0{,}75 \times a_{n+1} + 300 \leqslant 0{,}75 \times a_n + 300 \leqslant 1\,275 + 300$

  $\iff 1\,200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1\,575$

  Or $1\,575 \leqslant 1\,700$ donc $1\,200 \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1} \leqslant 1\,700$.

  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$ donc elle est héréditaire.
- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; donc d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout n, $1\,200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1\,700$.

b. Étude de la convergence de la suite (a_n).

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant a_n$ donc la suite (a_n) est décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1\,200 \leqslant a_n$ donc la suite (a_n) est minorée.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout n par $v_n = a_n - 1\,200$; donc $a_n = v_n + 1\,200$.

a. $$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 1\,200 = 0{,}75a_n + 300 - 1\,200 = 0{,}75(v_n + 1\,200) - 900 \\ &= 0{,}75v_n + 900 - 900 = 0{,}75v_n \end{aligned}$$

$v_0 = a_0 - 1\,200 = 1\,700 - 1\,200 = 500$

Donc (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0{,}75$.

b. On en déduit que, pour tout n, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0{,}75^n$.

c. On sait que, pour tout n, $a_n = v_n + 1200$, donc $a_n = 500 \times 0{,}75^n + 1200$.

6. **a.** $-1 < 0{,}75 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}75^n = 0$; on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} 500 \times 0{,}75^n = 0$ et donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1200$.

b. On peut donc dire qu'à long terme, le nombre de sportifs dans le club A va tendre vers 1 200, et donc que le nombre de sportifs dans le club B va tendre vers $3000 - 1200 = 1800$.

7. **a.** On complète le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1 700
    while A>=1280 :
        n=n+1
        A = 0.75*A + 300
    return n
```

b. La valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil est la plus petite valeur de n telle que $a_n < 1280$. On résout cette inéquation.

$$\begin{aligned}a_n < 1280 &\iff 500 \times 0{,}75^n + 1200 < 1280 \iff 500 \times 0{,}75^n < 80\\ &\iff 0{,}75^n < \frac{80}{500} \iff \ln\left(0{,}75^n\right) < \ln(0{,}16) \iff n\ln(0{,}75) < \ln(0{,}16)\\ &\iff n > \frac{\ln(0{,}16}{\ln(0{,}75)}\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}16}{\ln(0{,}75)} \approx 6{,}38$ donc la valeur de n renvoyée par la fonction `seuil` est 7.

EXERCICE 3 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm, on considère les points

$$\text{D}(3~;~1~;~5),\qquad \text{E}(3~;~-2~;~-1),\qquad \text{F}(-1~;~2~;~1),\qquad \text{G}(3~;~2~;~-3)$$

1. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{\text{EF}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1-3\\2-(-2)\\1-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{FG}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3-(-1)\\2-2\\-3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

b. $-4 \times (-1) = 4$ et $4 \times (-1) = -4 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{EF}}$ et $\overrightarrow{\text{FG}}$ ne sont pas colinéaires; on en déduit que les points E, F et G ne sont pas alignés.

2. **a.** La droite (FG) passe par le point F et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{FG}}$; elle a donc pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl}x &=& x_{\text{F}} + 4t\\ y &=& y_{\text{F}} + 0t\\ z &=& z_{\text{F}} + (-4)t\end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{soit} \left\{\begin{array}{rcl}x &=& -1+4t\\ y &=& 2\\ z &=& 1-4t\end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

b. On appelle H le point de coordonnées $(2~;~2~;~-2)$.

H est le projeté orthogonal de E sur la droite (FG) si H appartient à la droite (FG) et si les vecteurs $\overrightarrow{\text{EH}}$ et $\overrightarrow{\text{FG}}$ sont orthogonaux.

- Le point H appartient à la droite (FG) si on peut trouver une valeur de t telle que : $\left\{\begin{array}{l c l} x_{\text{H}} &=& -1+4t\\ y_{\text{H}} &=& 2\\ z_{\text{H}} &=& 1-4t\end{array}\right.$ c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{r c l} 2 &=& -1+4t\\ 2 &=& 2\\ -2 &=& 1-4t\end{array}\right.$

  La valeur $t=\dfrac{3}{4}$ convient donc le point H appartient à la droite (FG).
- Le vecteur $\overrightarrow{\text{EH}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2-3\\2-(-2)\\-2-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{FG}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

  $\overrightarrow{\text{EH}}\cdot\overrightarrow{\text{FG}}=(-1)\times 4+4\times 0+(-1)\times(-4)=0$ donc $\overrightarrow{\text{EH}}\perp\overrightarrow{\text{FG}}$

Le point H est donc le projeté orthogonal du point E sur la droite (FG).

c. D'après les questions précédentes, [EH] est la hauteur du triangle EFG correspondant à la base [FG] ; donc l'aire du triangle EFG vaut, en cm^2 :
$\mathscr{A}=\dfrac{\text{EH}\times\text{FG}}{2}$.

- $\overrightarrow{\text{EH}}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ donc $\text{EH}=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$
- $\overrightarrow{\text{FG}}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $\text{FG}=\sqrt{4^2+0^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

Donc l'aire du triangle est en cm^2 : $\mathscr{A}=\dfrac{3\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}}{2}=12$.

3. **a.** Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EFG) s'il est orthogonal à $\overrightarrow{\text{EF}}$ et à $\overrightarrow{\text{FG}}$.

- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{EF}}=2\times(-4)+1\times 4+2\times 2=0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\text{EF}}$
- $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{FG}}=2\times 4+1\times 0+2\times(-4)=0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\text{FG}}$

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal au plan (EFG).

b. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EFG), donc le plan (EFG) a une équation de la forme $2x+y+2z+d=0$ où d est un réel à déterminer.

F est un point de (EFG) donc $2x_{\text{F}}+y_{\text{F}}+2z_{\text{F}}+d=0$ c'est-à-dire
$2\times(-1)+2+2\times 1+d=0$ ce qui donne $d=-2$.

Le plan (EFG) a donc pour équation $2x+y+2z-2=0$.

c. La droite (d) passant par le point D et orthogonale au plan (EFG) a pour vecteur directeur tout vecteur normal au plan (EFG) donc en particulier le vecteur $\overrightarrow{n}$. Elle a donc pour représentation paramétrique ;

$\left\{\begin{array}{l c l} x &=& x_{\text{D}}+x_{\vec{n}}\,t\\ y &=& y_{\text{D}}+y_{\vec{n}}\,t\\ z &=& z_{\text{D}}+z_{\vec{n}}\,t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$ c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 3+2t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 5+2t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$

d. On note K le projeté orthogonal du point D sur le plan (EFG). Le point K appartient donc à la droite (d) et au plan (EFG) donc ses coordonnées sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+2t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 5+2t \\ 2x+y+2z-2 &=& 0 \end{array}\right.$

On a donc t tel que $2(3+2t)+(1+t)+2(5+2t)-2=0$, soit

$6+4t+1+t+10+4t-2=0$ ou encore $9t+15=0$; ce qui donne $t=-\dfrac{15}{9}=-\dfrac{5}{3}$.

On a donc : $x_{\text{K}}=3+2t=3+2\left(-\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}$, $y_{\text{K}}=1+t=1+\left(-\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}$ et

$z_{\text{K}}=5+2t=5+2\left(-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{5}{3}$

Donc le point K a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,-\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{5}{3}\right)$.

4. **a.** $\text{DK}^2=\left(-\dfrac{1}{3}-3\right)^2+\left(-\dfrac{2}{3}-1\right)^2+\left(\dfrac{5}{3}-5\right)^2=\left(-\dfrac{10}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{10}{3}\right)^2$

$=\dfrac{100}{9}+\dfrac{25}{9}+\dfrac{100}{9}=\dfrac{225}{9}=25$

Donc la distance DK est égale à 5 cm.

b. Le volume du tétraèdre DEFG est donné par la formule : $\dfrac{\text{aire de la base}\times\text{hauteur}}{3}$.

Une base du tétraèdre est le triangle EFG d'aire 12, et la hauteur relative à cette base est [DK] de longueur 5.

Le volume du tétraèdre DEFG est donc, en cm^3 : $\dfrac{12\times5}{3}=20$.

EXERCICE 4 **5 points**

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=0{,}05-\dfrac{\ln x}{x-1}$.

La limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à :

a. $+\infty$ **b.** $0{,}05$ **c.** $-\infty$ **d.** 0

$f(x)=0{,}05-\dfrac{\ln x}{x-1}=0{,}05-\dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{x}{x-1}$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{x}{x-1}=0$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0{,}05$. **Réponse b.**

2. On considère une fonction h continue sur $[-2;4]$ telle que : $h(-1)=0$, $h(1)=4$, $h(3)=-1$.

On peut affirmer que :

a. la fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
b. la fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
c. il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[1\,;\,3]$ tel que $h(a)=1$.
d. l'équation $h(x)=1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2\,;\,4]$.

C'est l'application du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[1\,;\,3]$. **Réponse c.**

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et (v_n) converge vers 0 .
On peut affirmer que :

a. la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge.
b. la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge.
c. la suite (u_n) est croissante.
d. $\lim\limits_{n \to +\infty} (-u_n)^n = -\infty$

Limite du quotient de deux suites. **Réponse b.**

4. Pour participer à un jeu, un joueur doit payer 4 €.
Il lance ensuite un dé équilibré à six faces :

— s'il obtient 1, il remporte 12 € ;
— s'il obtient un nombre pair, il remporte 3 € ;
— sinon, il ne remporte rien.

En moyenne, le joueur :

a. gagne 3,50 €
b. perd 3 €.
c. perd 1,50 €
d. perd 0,50 €.

Soit X la variable aléatoire qui donne le gain (mise moins ce que l'on gagne) ; on cherche l'espérance mathématique de cette variable aléatoire.

tirage	nombre 1	nombre pair	autre
gain	$12-4=8$	$3-4=-1$	$0-4=-4$
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

$E(X) = 8 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{3}{6} + (-4) \times \frac{2}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$ ce qui correspond à une perte de 0,50 €. **Réponse d.**

5. On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(3\,;\ p)$.
On sait que $P(X=0) = \frac{1}{125}$. On peut affirmer que :

a. $p = \frac{1}{5}$
b. $P(X=1) = \frac{124}{125}$
c. $p = \frac{4}{5}$
d. $P(X=1) = \frac{4}{5}$

$P(X=0) = \binom{3}{0} \times p^0 \times (1-p)^{3-0} = (1-p)^3$

On a donc $(1-p)^3 = \frac{1}{125} \iff (1-p)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \iff 1-p = \frac{1}{5}$; donc $p = \frac{4}{5}$.
Réponse c.