Corrigé du baccalauréat Amérique du Sud 26 septembre 2022
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Jour 1

Exercice 1 **5 points**

Partie A

$$f(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x).$$

1. • Limite en 0 : On sait que $\lim\limits_{x \to 0} x^2\ln(x) = 0$, que $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, donc par somme de limites : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
   • Limite en $+\infty$: en écrivant $f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$, on a :
   $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} -2\ln(x) = -\infty$, puis $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - 2\ln(x) = -\infty$ et enfin par produit de limites :
   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
2. Pour tout réel de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, $f'(x) = 2x - 4x\ln(x) - 2x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x - 4x\ln(x) - 2x = -4x\ln(x)$.
3. Puisque $x \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de $\ln(x)$.
   On sait que $\ln(x) < 0$ sur $[0~;~1[$, donc $f'(x) > 0$ sur $[0~;~1[$ et que
   $\ln(x) > 0$ sur $]1~;~+\infty[$, donc $f'(x) < 0$ sur $]1~;~+\infty[$.
   La fonction f est donc :
   - croissante sur $[0;1]$ de 1 à $f(1) = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 0 = 2$;
   - décroissante sur $[1~;~+\infty[$ de 2 à moins l'infini.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4. La fonction f est continue car dérivable sur l'intervalle $[1~;~+\infty]$ et décroissante de 2 à moins l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique α, avec $\alpha \in]1~;~+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   Comme $f(\text{e}) = 1 + \text{e}^2(1 - 2\ln\text{e}) = 1 + \text{e}^2(1-2) = 1 - \text{e}^2 \approx -6,4$.
   En appliquant le même théorème, on a donc $1 < \alpha < \text{e}$.

On admet dans la suite de l'exercice, que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0;1]$.
Rem. : comme $0 \notin [1~;~2]$ le même théorème montre qu'il n'existe pas de réel $\beta \in [0~;~1]$ tel que $f(\beta) = 0$.

5. On part de l'intervalle [1; 2,7], (avec e $\approx 2,7$) `dichotomie(1)` donne par dichotomie un encadrement de α par deux réels a et b tels que $b - a \leqslant 10^{-1}$.

   Comme $\alpha \approx 1,9$, C et D sont exclus et A ne donne pas un encadrement au dixième : reste la proposition B.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, par

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. g est un quotient de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$, le dénominateur étant non nul (supérieur ou égal à 1), donc quel que soit $x \in]0\ ;\ +\infty[$:
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times \left(1+x^2\right) - 2x\ln(x)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{\frac{1+x^2-2x^2\ln(x)}{x}}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1+x^2-2x^2\ln(x)}{x\left(1+x^2\right)^2} = \frac{f(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}.$$
2. Le résultat précédent montre que puisque $x > 0$ et $\left(1+x^2\right)^2 > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du numérateur donc le signe de $f(x)$.

   Or on a vu (Partie A question 3.) que $f(x) > 0$ sur $]0\ ;\ \alpha[$ et $f(x) < 0$ sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

   La fonction g est donc croissante sur $[0\ ;\ \alpha]$, puis décroissante sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$ avec un maximum $g(\alpha)$.

   Rem. : on sait que $f(\alpha) = 0 \iff 1+\alpha^2 - 2\alpha^2\ln\alpha \iff 2\alpha^2\ln\alpha = 1+\alpha^2 \iff$
   $\ln\alpha = \dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$.

   Donc $g(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)}{1+\alpha^2} = \dfrac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\alpha^2} = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.
3. On note T_1 la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1 et on note T_α la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse α.

   • On a $M(x\ ;\ y) \in T_1 \iff y - g(1) = g'(1)(x-1) \iff y - 0 = \dfrac{1}{2}(x-1) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$;

   • On a vu que la fonction a un maximum en α et en ce point le nombre dérivé égal au coefficient directeur de la tangente en ce point (donc T_α) est nul : la tangente est donc horizontale d'équation $y = g(\alpha)$ ou $y = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.

   Donc $M(x\ ;\ y) \in T_1 \cap T_\alpha \iff \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\alpha^2}$, soit
   $x - 1 = \dfrac{1}{\alpha^2} \iff x = 1 + \dfrac{1}{\alpha^2}$ et $y = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.

   Donc $T_1 \cap T_\alpha \left(1 + \dfrac{1}{\alpha^2}\ ;\ \dfrac{1}{2\alpha^2}\right)$.

Exercice 2 **5 points**

1. **a.** On a $\dfrac{4921}{18221965} \approx 0{,}0161 \approx 1,6\,\%$.

   b. De même $\dfrac{4921}{18221965} \approx 0{,}0003 < 0,001$ soit moins de 0,1 %.

2. **a.** Les 20 accouchements sont des évènements indépendants et la probabilité d'avoir une naissance est égale à 0,016, donc la variable X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0,016)$.

   On a $p(X = 1) = 20 \times 0,016 \times 0984^{19} \approx 0{,}2355$ soit 0,236 au millième près.

   b. On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,984^n \times 0,016^0 = 1 - 0,984^n$.

   Il faut donc résoudre l'inéquation :

   $1 - 0,984^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,984^n \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\ln 0,01 \geqslant n \ln 0,984 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,984}$ soit $n \geqslant 285,5$. Donc en moyenne, sur 286 accouchements il y a un accouchement double.

3. Dans cette maternité, parmi les naissances double, on estime qu'il y a 30 % de jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc 70 % de jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).

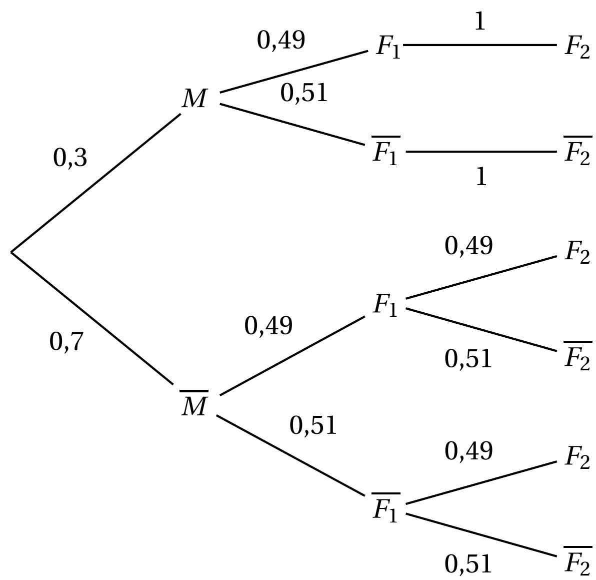
   Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à 0,49 et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à 0,51.

   Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau–né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né.

   On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

   - M : « les jumeaux sont monozygotes »;
   - F_1 : « le premier nouveau–né est une fille »;
   - F_2 : « le second nouveau–né est une fille ».

   On notera $p(A)$ la probabilité de l'évènement A et $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.



a. Voir ci-dessus

b. On a en suivant les première et troisième branche de l'arbre pondéré :
$p\left(F_1 \cap F_2\right) = 0,3 \times 0,49 \times 1 + 0,7 \times 0,49 \times 0,49 = 0,147 + 0,168\,07 = 0,315\,07 \approx 0,316$.

c. Sachant que les nouveaux-nés sont des jumelles, la probabilité qu'elles soient monozygotes est la probabilité conditionnelle :
$p_{F_1 \cap F_2}(M) = \dfrac{p(M \cap (F_1 \cap F_2))}{p(F_1 \cap F_2)} = \dfrac{0,3 \times 0,49 \times 1}{0,315\,07} \approx 0,466\,5$ soit 0,467 au millième près.

EXERCICE 3 **5 points**

A(0 ; 4 ; 16), B(0 ; 4 ; −10), C(4 ; −8 ; 0) et K(0 ; 4 ; 3).

1. **a.** On a $\text{CM}^2 = (4-0)^2 + (-8-4)^2 + (0-3)^2 = 16 + 144 + 9 = 169 = 13^2$, donc
$\text{CM} = 13 \iff \text{C} \in S$.

b. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}4\\-12\\-16\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}4\\-12\\10\end{pmatrix}$

D'où le produit scalaire : $\overrightarrow{\text{AC}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 16 + 144 - 160 = 160 - 160 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, les droites (AC) et (BC) sont perpendiculaires en C, donc le triangle ABC est rectangle en C.

2. **a.** • $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 12 - 12 + 0 = 0$: $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{AC}}$;
• $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 12 - 12 + 0 = 0$: $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{BC}}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées sont égales mais pas les dernières), donc $\overrightarrow{n}$ normal deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est normal à ce plan.

b. On sait qu'alors les coordonnées de $\overrightarrow{n}$ sont les coefficients de x, y et z dans l'équation du plan (ABC).

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 3x + y + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Or par exemple :

$\text{C}(4\,;\,-8\,;\,0) \in (\text{ABC}) \iff 3 \times 4 + (-8) + d = 0 \iff 12 - 8 + d = 0 \iff d = -4$.

Finalement $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \iff 3x + y - 4 = 0$.

3. **a.** Si D appartient à l'axe des abscisses son ordonnée et sa cote sont nuls, donc D a pour coordonnées $(x\,;\,0\,;\,;0)$.

De plus $\text{KD} = 13 \Rightarrow \text{KD}^2 = 13^2 = 169 = (x-0)^2 + (0-4)^2 + (0-3)^2 \iff (x-0)^2 + 16 + 9 = 169 \iff \iff x^2 = 144 \iff x^2 = 12^2 \iff x^2 - 12^2 = 0 \iff (x+12)(x-12) = 0 \left\{\begin{array}{rcl} x - 4 + 12 & = & 0 \\ x - - & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x + 12 & = & 0 \\ x - 12 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -12 \\ x & = & 12 \end{array}\right.$

Conclusion $\text{D}(12\,;\,0\,;\,0)$.

b. Si la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC) un de ses vecteurs directeurs est le vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à ce plan. On a donc :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta \iff \overrightarrow{\text{D}M} = t\,\overrightarrow{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$. Cette égalité se traduit par le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 12 & = & 3t \\ y - 0 & = & 1t \\ z - 0 & = & 0t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 12 + 3t \\ y & = & t \\ z & = & 0t \end{array}\right. .$$

c. D appartient à Δ perpendiculaire au plan (ABC) ; cherchons les coordonnées du projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) : I

I appartient au plan (ABC) et appartient à Δ, ses coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient donc l'équation du plan (ABC) et les équations paramétriques de Δ soit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 12 + 3t \\ y & = & t \\ z & = & 0t \\ 3x + y - 4 & = & 0 \end{array}\right.$$

En remplaçant dans la dernière équation x et y par leurs valeurs en fonction de t on obtient $3(12 + 3t) + t - 4 = 0 \iff 36 + 9t + t - 4 = 0 \iff 10t + 32 = 0$

$\iff 10t = -32 \iff t = -\dfrac{32}{10} = -\dfrac{16}{5}$.

En reportant cette valeur dans les deux premières équations de Δ, on obtient :

$x = 12 - 3 \times \dfrac{16}{5} = \dfrac{60}{5} - \dfrac{48}{5} = \dfrac{12}{5}$; $y = -\dfrac{16}{5}$ et $z = 0$.

$\text{I}\left(\dfrac{12}{5}\,;\,-\dfrac{16}{5}\,;0\right)$.

On calcule $\text{DI}^2 = \left(\dfrac{12}{5} - 12\right)^2 + \left(-\dfrac{16}{5} - 0\right)^2 + 0^2 = \left(-\dfrac{48}{5}\right)^2 + \left(-\dfrac{16}{5}\right)^2 = \dfrac{2\,304}{25} + \dfrac{256}{25} = \dfrac{2\,560}{25} = \dfrac{256 \times 10}{25}$.

Finalement $\text{DI} = \sqrt{\dfrac{256 \times 10}{25}} = \dfrac{16\sqrt{10}}{5}$.

4. En prenant la base (ABC) rectangle en C : son aire est donc égale à : $\dfrac{\text{AC} \times \text{BC}}{2}$.

$\text{AC}^2 = 16 + 144 + 256 = 416$; $\text{AC} = \sqrt{416}$;
$\text{BC}^2 = 16 + 144 + 100 = 260$; $\text{BC} = \sqrt{260}$.
Donc $\mathscr{A}(\text{ABC}) = \dfrac{\sqrt{416} \times \sqrt{260}}{2} = 52\sqrt{18}$
Donc avec $h = \dfrac{16\sqrt{10}}{5}$, on obtient :
$V = \dfrac{1}{3} \times 52\sqrt{18} \times \dfrac{16\sqrt{10}}{5} = \dfrac{1\,664}{3} \approx 554,6$ soit 555 à l'unité près.

Exercice 4 **5 points**

Partie A

$$u_{n+1} = 2u_n\,(1 - u_n)\,.$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f\,(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1 - x).$$

1. f est une fonction polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f(x) = 2x - 2x^2$, d'où $f'(x) = 2 - 4x = 2(1 - 2x)$.
On a :
   - $f'(x) = 0 \iff 1 - 2x = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$;
   - $f'(x) > 0 \iff 1 - 2x > 0 \iff x < \dfrac{1}{2}$; la dérivée est positive sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, la fonction f est donc croissante sur cet intervalle.
   - $f'(x) < 0 \iff 1 - 2x < 0 \iff x > \dfrac{1}{2}$;
2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   - $u_1 = 2u_0\,(1 - u_0) = 2 \times 0,3 \times 0,7 = 0,42$.
   - Démonstration par récurrence :

     — *Initialisation* : on a $u_0 \leqslant u_1$ car $0,3 \leqslant 0,42$.

     — *Hérédité* On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant u_{n+1}$.
     Comme on suppose que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ on a par croissance de la fonction f sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, $f\,(u_n) \leqslant f\,(u_{n+1}) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, soit
     $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}$, ou encore $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
     La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est encore au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence on a démontré que :
     pour tout rentier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$
3. Cet encadrement montre que

— la suite (u_n) est croissante et
— la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

Conclusion la suite (u_n) croissante et majorée converge vers une limite $\ell \leqslant \frac{1}{2}$.

4. La fonction f étant continue on a donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2u_n(1-u_n)$, soit

$\ell = 2\ell(1-\ell) \iff \ell = 2\ell - 2\ell^2 \iff 2\ell^2 - \ell = 0 \iff \ell(2\ell-1) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl}\ell & = & 0\\ 2\ell - 1 & = & 0\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl}\ell & = & 0\\ \ell & = & \frac{1}{2}\end{array}\right.$ La seule solution acceptable est $\ell = \frac{1}{2}$.

Partie B

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.

a. La relation de récurrence s'écrit alors $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0 \times P_n)$, soit $P_{n+1} - P_n = P_n \iff P_{n+1} = 2P_n$, donc $P_{n+1} = 2P_n$: cette égalité montre que la suite (P_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $P_0 = 3$.

b. On sait quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $P_n = 3 \times 2^n$: la limite de la suite (P_n) est plus l'infini (impossible)

2. Dans cette question $b = 0,2$. On a donc $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0,2P_n)$

a. On a $v_0 = 0,1 \times P_0 = 01 \times 3 = 0,3$.

La relation de récurrence devient :

$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0,2 \times P_n) \iff P_{n+1} - P_n = P_n - 0,2P_n^2$, d'où

$P_{n+1} = 2P_n - 0,2P_n^2$. (1)

Or $v_{n+1} = 0,1P_{n+1} = 0,1\left(2P_n - 0,2P_n^2\right) = 0,2\left(P_n - 0,1P_n^2\right)$.

Comme $v_n = 0,1 \times P_n \iff 10v_n = P_n$, l'égalité ci-dessus devient :

$v_{n+1} = 0,2\left(10v_n - 0,1 \times (10v_n)^2\right)$, soit

$v_{n+1} = 0,2\left(10v_n - 10v_n^2\right) = 2v_n(1 - v_n)$.

b. La relation de la question précédente montre que la suite (v_n) est la suite (u_n) de la **Partie A** et on a vu que cette suite converge vers $\frac{1}{2}$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

Or $P_n = 10v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 10 \times \frac{1}{2} = 5$.

Finalement la population se rapprochera de 5 000 individus.