

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1

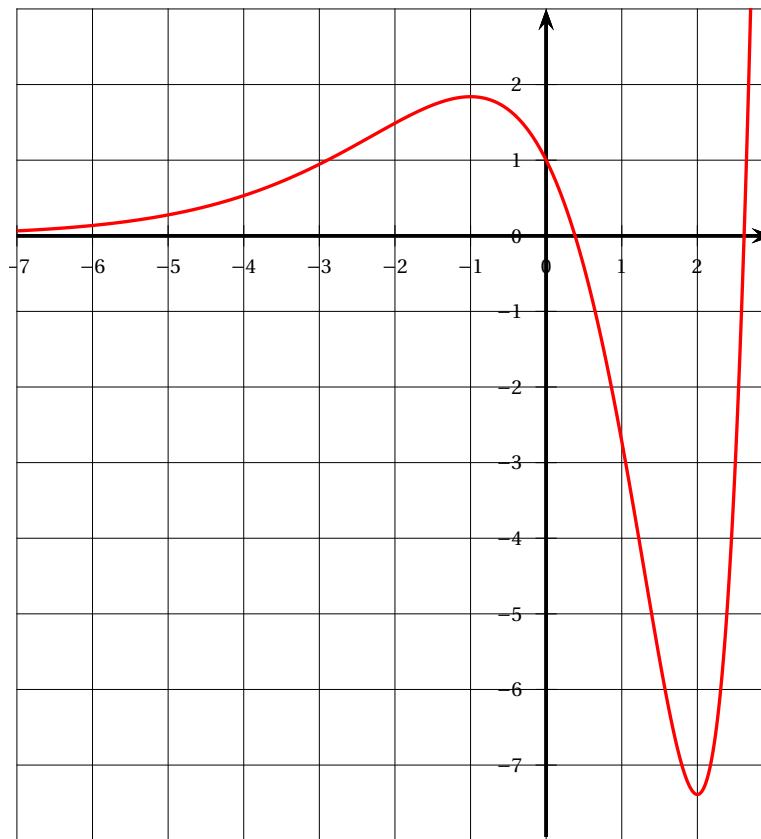
5 points

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $f'$  sa fonction dérivée.

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée  $f'$ .



Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction dérivée  $f'$ . Aucune justification n'est demandée.

1. Donner le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . On utilisera des valeurs approchées si besoin.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction  $f$  semble être convexe.

Partie B

On admet que la fonction  $f$  de la partie A est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6)e^x.$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère.

1. a. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

- b.** Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .
- 2.** Montrer que, pour tout réel  $x$ , on a  $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$ .
- 3.** En déduire le sens de variation de la fonction  $f$ .
- 4.** Déterminer l'équation réduite de la tangente ( $\mathcal{T}$ ) à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $f''$  la fonction dérivée seconde de la fonction  $f$ . On admet que, pour tout réel  $x$ , on a  $f''(x) = (x + 1)(x - 2)e^x$ .

- 5. a.** Étudier la convexité de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- b.** Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[-1 ; 2]$ , on a  $f(x) \leq x + 6$ .

**EXERCICE 2****5 points**

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.

En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ , où  $n$  désigne le rang de l'année à partir de 2023.

L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors  $a_0 = 1 700$  et  $b_0 = 1 300$ .

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
- chaque année, 15% des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
- chaque année, 10% des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

- 1.** Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.
- 2.** Pour tout entier naturel  $n$ , déterminer une relation liant  $a_n$  et  $b_n$ .
- 3.** Montrer que la suite  $(a_n)$  vérifie la relation suivante pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

- 4. a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700.$$

- b.** En déduire que la suite  $(a_n)$  converge.
- 5.** Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = a_n - 1200$ .
- a.** Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique.
- b.** Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- c.** En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$ .
- 6. a.** Déterminer la limite de la suite  $(a_n)$ .
- b.** Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.
- 7. a.** Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de  $n$  à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```

def seuil() :
    n = 0
    A = 1 700
    while ... :
        n = n + 1
        A = ...
    return

```

**b.** Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.

**EXERCICE 3****5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm, on considère les points

$$D(3 ; 1 ; 5), \quad E(3 ; -2 ; -1), \quad F(-1 ; 2 ; 1), \quad G(3 ; 2 ; -3).$$

1. **a.** Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\vec{EF}$  et  $\vec{FG}$ .  
**b.** Justifier que les points E, F et G ne sont pas alignés.
2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG).  
**b.** On appelle H le point de coordonnées (2 ; 2 ; -2).  
Vérifier que H est le projeté orthogonal de E sur la droite (FG) .  
**c.** Montrer que l'aire du triangle EFG est égale à 12 cm<sup>2</sup>.
3. **a.** Démontrer que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan (EFG).  
**b.** Déterminer une équation cartésienne du plan (EFG) .  
**c.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point D et orthogonale au plan (EFG) .  
**d.** On note K le projeté orthogonal du point D sur le plan (EFG).  
À l'aide des questions précédentes, calculer les coordonnées du point K.
4. **a.** Vérifier que la distance DK est égale à 5 cm.  
**b.** En déduire le volume du tétraèdre DEFG.

**EXERCICE 4****5 points**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.*

*Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*

*Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.*

*Aucune justification n'est demandée.*

*Une réponse fautive, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*

*Les cinq questions sont indépendantes.*

1. On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = 0,05 - \frac{\ln x}{x-1}.$$

La limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$  est égale à :

- a.**  $+\infty$                       **b.** 0,05                      **c.**  $-\infty$                       **d.** 0

2. On considère une fonction  $h$  continue sur l'intervalle  $[-2; 4]$  telle que :

$$h(-1) = 0, \quad h(1) = 4, \quad h(3) = -1.$$

On peut affirmer que :

- a. la fonction  $h$  est croissante sur l'intervalle  $[-1; 1]$ .
  - b. la fonction  $h$  est positive sur l'intervalle  $[-1; 1]$ .
  - c. il existe au moins un nombre réel  $a$  dans l'intervalle  $[1; 3]$  tel que  $h(a) = 1$ .
  - d. l'équation  $h(x) = 1$  admet exactement deux solutions dans l'intervalle  $[-2; 4]$ .
3. On considère deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  à termes strictement positifs telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ et } (v_n) \text{ converge vers } 0.$$

On peut affirmer que :

- a. la suite  $\left(\frac{1}{v_n}\right)$  converge.
  - b. la suite  $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$  converge.
  - c. la suite  $(u_n)$  est croissante.
  - d.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n)^n = -\infty$
4. Pour participer à un jeu, un joueur doit payer 4 €.

Il lance ensuite un dé équilibré à six faces :

- s'il obtient 1, il remporte 12 €;
- s'il obtient un nombre pair, il remporte 3€;
- sinon, il ne remporte rien.

En moyenne, le joueur :

- a. gagne 3,50 €
  - b. perd 3 €.
  - c. perd 1,50 €
  - d. perd 0,50 €.
5. On considère la variable aléatoire  $X$  suivant la loi binomiale  $\mathcal{B}(3; p)$ .

On sait que  $P(X = 0) = \frac{1}{125}$ . On peut affirmer que :

- a.  $p = \frac{1}{5}$
- b.  $P(X = 1) = \frac{124}{125}$
- c.  $p = \frac{4}{5}$
- d.  $P(X = 1) = \frac{4}{5}$