Corrigé du baccalauréat Nouvelle-Calédonie 26 octobre 2022 Jour 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : **4 heures**

EXERCICE 1 7 points **probabilités**

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

1. a. On a $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = \lim\limits_{x\to 0} -6x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} -4\ln x = -\infty$ et par somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Graphiquement ce résultat montre que la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées est asymptotoe verticale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.

b. On a puisque $x > 0$, $x^2 - 6x = x^2\left(1 - \dfrac{6}{x}\right)$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{x} = 0$, donc
- $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{6}{x} = 1$ (par somme de limites), puis
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, d'où
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{6}{x}\right) = +\infty$ (par produit de limites) ; enfin
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc finalement :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (par somme de limites).

2. a. Sur l'intervalle $]0 ;\ +\infty[$, f est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = 2x - 6 + 4 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{x}$.

b. Comme $x > 0$, le signe du quotient est celui du numérateur, donc du trinôme $2x^2 - 6x + 4$ ou plus simplement du trinôme $x^2 - 3x + 2$.

Celui-ci a une racine évidente : 1 et l'autre 2 (puisque le produit des racines est 2).

On alors que $f'(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $]1 ; 2[$ où $f'(x) < 0$

La fonction f est donc croissante sauf sur l'intervalle $]1 ; 2[$ où elle est décroissante.

On a $f(1) = 1 - 6 + 4\ln 1 = 0 - 5 = -5$ et $f(2) = 4 - 12 + 4\ln 2 = \ln 2 - 8$.

D'où le tableau de variations :

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$\ln(2) - 8$	$\nearrow$	$+\infty$

3. • On a $f(4) = 16-24+4\ln 4 = -8+8\ln 2 \approx -2,45$ et $f(5) = 25-30+4\ln 25 = 4\ln 25-5 \approx 7,88$;

• Sur l'intervalle $[4;5]$, la fonction est continue car dérivable et strictement croissante, donc :

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in]4~;~5[$ tel que $f(\alpha) = 0$

4. $f''(x) = \dfrac{2x^2-4}{x^2}$.

a. On a $2x^2-4=0 \iff 2\left(x^2-2\right)=0 \iff x^2-2=0 \iff \left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)=0 \iff$ $\left\{\begin{array}{l} x+\sqrt{2}=0 \\ x-\sqrt{2}=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$

Le trinôme, donc $f''(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $\left]-\sqrt{2}~;~\sqrt{2}\right[$ ou ici puisque $x>0$, $f''(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $\left]0~;~\sqrt{2}\right[$. Conclusion :

- Sur l'intervalle $\left]0~;~\sqrt{2}\right]$, $f''(x)<0$, la fonction f est concave;
- Sur l'intervalle $\left]\sqrt{2}~;~+\infty\right]$, $f''(x)>0$, la fonction f est convexe;
- $f''\left(\sqrt{2}\right)=0$: le point d'abscisse $\sqrt{2}$, donc d'ordonnée $f\,() = 2-6\sqrt{2}+4\ln\sqrt{2} = 2-6\sqrt{2}+4\times\dfrac{1}{2}\ln 2 = 2-6\sqrt{2}+2\ln 2$ est le point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$, car en ce point la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

b. • Pour $k \in]0~;~\sqrt{2}[$, $[\mathrm{A}M_k]$ est une corde de la courbe d'une fonction concave donc $[\mathrm{A}M_k]$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$.

• Pour $k \in \left]\sqrt{2}~;~+\infty\right[$, $[\mathrm{A}M_k]$ est une corde de la courbe d'une fonction convexe donc $[\mathrm{A}M_k]$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 2 **7 points** **probabilités**

$$f(x) = x^3\,\mathrm{e}^{x}.$$

1. On définit la suite (u_n) par $u_0=-1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

a. • $u_1 = (-1)^3\,\mathrm{e}^{-1} = -\,\mathrm{e}^{-1} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx -0,368$;

• $u_2 = f\left(u_1\right) = \left(-\,\mathrm{e}^{-1}\right)^3\left(\mathrm{e}^{-\,\mathrm{e}^{-1}}\right) = -\,\mathrm{e}^{-3}\times\left(\mathrm{e}^{-\,\mathrm{e}^{-1}}\right) = -\,\mathrm{e}^{-3-\,\mathrm{e}^{-1}} \approx -0,034$.

b. On a `fonc(2)`$= u_2 \approx -0,034$.

2. **a.** En dérivant $f(x)$ comme un produit on obtient :
$f'(x)3x^2\,\mathrm{e}^{x} + x^3\,\mathrm{e}^{x} = x^2\,\mathrm{e}^{x}(3+x)$.

b. ci-dessous :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f	0 ↘	$-27\,\mathrm{e}^{-3}$ ↗	$+\infty$

Quel que soit le réel x, $x^2 \geqslant 0$ et $\text{e}^{\,x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $3+x$ qui s'annule pour $x = -3$, d'où les deux intervalles de variations;

$3+x < 0 \iff x < -3$: sur $]-\infty\,;\,-3[$, $f'(x) < 0$: la fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\,;\,-3[$;

$3+x > 0 \iff x > -3$: sur $]-3\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$: la fonction f est donc croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$;

$f(-3) = (-3)^3 \times \text{e}^{\,-3} = -27\,\text{e}^{\,-3} = -\dfrac{27}{\text{e}^{\,3}} \approx -1,344$ est le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$.

c. *Initialisation* : avec $u_0 = -1$ et $u_1 \approx -0,368$, on a bien : $-1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 0$: l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$.

On a vu que sur l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$, donc a fortiori sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, la fonction est strictement croissante.

On a donc par croissance de f : $f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(0)$, ou encore :

$u_1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant f(0)$

et comme $u_1 \approx -0,338$, $-1 \leqslant u_1$ et $f(0) = 0$, on a bien :

$-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0$.

La relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n, $n \in \mathbb{N}$, il est encore vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$.

d. La question précédente montre que :

- la suite (u_n) est croissante;
- la suite (u_n) est majorée par 0;

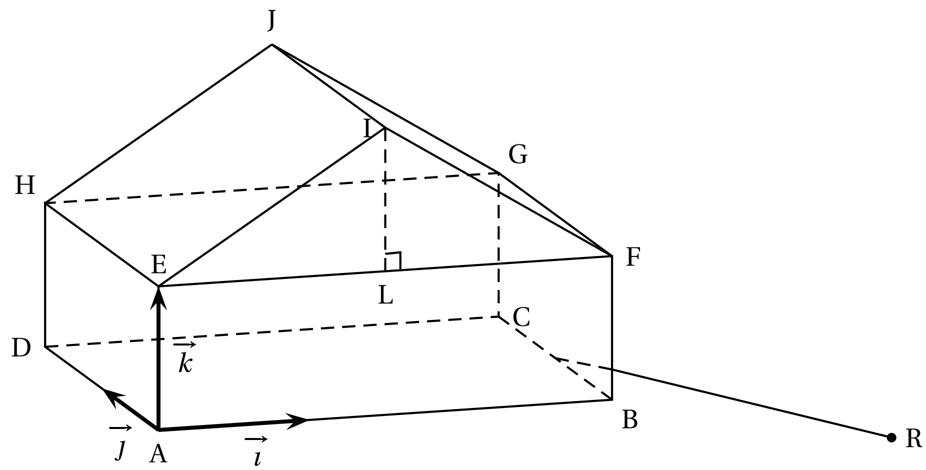
La suite (u_n) est donc convergente vers une limite ℓ, avec $\ell \leqslant 0$.

e. On résout dans $]-1\,;\,0[$, (car d'après la question précédente tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle) l'équation :

$f(x) = x \iff x^3\,\text{e}^{\,x} = x \iff x^3\,\text{e}^{\,x} - x = 0 \iff x\left(x^2\,\text{e}^{\,x} - 1\right) = 0 \iff x = 0$, car on admet que l'équation $x^2\,\text{e}^{\,x} - 1 = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]-1\,;\,0[$.

Conclusion $\ell = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 3 7 points



1. On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Donc G(3 ; 2 ; 1).

2. On sait que $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{EHI}) \iff 2x + 0y - 3z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$.
Ainsi, par exemple $\text{E}(0\ ;\ 0\ ;\ 1) \in (\text{EHI}) \iff 2 \times 0 + 0 \times 0 - 3 \times 1 = d \iff d = -3$.
Donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{EHI}) \iff 2x - 3z = -3$

3. Puisque (EIF) est isocèle en I le projeté orthogonal de I sur [EF] est le milieu de [EF] ; ces deux points ont donc la même abscisse qui est aussi celle du milieu de [AB] soit $\dfrac{3}{2}$.
L'ordonnée de I est aussi celle de E soit 0, enfin
$\text{I}\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ 0\ ;\ z\right) \in (\text{EHI}) \iff 2 \times \dfrac{3}{2} - 3z = -3 \iff 3z = 3 + 3 \iff z = 2$. Donc $\text{I}\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ 0\ ;\ 2\right)$.

4. • Avec le produit scalaire : avec E(0 ; 0 ; 1) et F(3 ; 0 ; 1), on a $\overrightarrow{\text{IE}}\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{IF}}\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc :

$\text{IE}^2 = \dfrac{9}{4} + 0 + 1 = \dfrac{13}{4}$, d'où $\text{IE} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$;
$\text{IF}^2 = \dfrac{9}{4} + 0 + 1 = \dfrac{13}{4}$, d'où $\text{IF} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$;
Donc $\overrightarrow{\text{IE}} \cdot \overrightarrow{\text{IF}} = \text{IE} \times \text{IF} \times \cos\left(\overrightarrow{\text{IF}}\ ;\ \right)$, soit :
$-\dfrac{9}{4} + 0 + 1 = \dfrac{\sqrt{13}}{2} \times \dfrac{\sqrt{13}}{2} \times \cos\left(\overrightarrow{\text{IE}}\ ;\ \overrightarrow{\text{IF}}\right) \iff \dfrac{-5}{4} = \dfrac{13}{4} \times \cos\left(\overrightarrow{\text{IE}}\ ;\ \overrightarrow{\text{IF}}\right)$.
Finalement $\cos\left(\overrightarrow{\text{IE}}\ ;\ \overrightarrow{\text{IF}}\right) = \dfrac{\frac{-5}{4}}{\frac{13}{4}} = -\dfrac{5}{13}$. La calculatrice donne $\left(\overrightarrow{\text{IE}}\ ;\ \overrightarrow{\text{IF}}\right) \approx 112,6°$.

• Avec le triangle (IEL) rectangle en L (L projeté orthogonal de I sur (EF) :
On a $\text{L}\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$, donc $\text{IL}^2 = 0 + 0 + 1^2 = 1$, d'où IL = 1 ;
On a vu que $\text{EI} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$, d'où $\cos\left(\widehat{\text{EIL}}\right) = \dfrac{\text{IL}}{\text{IE}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$: la calculatrice donne $\left(\widehat{\text{EIL}}\right) \approx$ 56,30° ; donc $\widehat{\text{EIF}} = 2\widehat{\text{EIL}} \approx 2 \times 56,30$, soit finalement $\widehat{\text{EIF}} \approx 112,6°$.

5. **a.** On sait que $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta \iff \overrightarrow{\text{R}M} = t\,\overrightarrow{u} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-6 &=& -3t\\ y+3 &=& 4t\\ z+1 &=& 1t\end{array}\right., (t \in \mathbb{R}) \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 6-3t\\ y &=& -3+4t\\ z &=& -1+t\end{array}\right., \quad (t \in \mathbb{R}).$

b. K$(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à Δ et au plan (BFG) si ses coordonnées vérifient les équations paramétriques de Δ et l'équation cartésienne du plan (BFG) soit si le triplet de réels $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifie le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 6-3t\\ y &=& -3+4t\\ z &=& -1+t\\ x &=& 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3 &=& 6-3t\\ y &=& -3+4t\\ z &=& -1+t\\ x &=& 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3t &=& 3\\ y &=& -3+4t\\ z &=& -1+t\\ x &=& 3\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} t &=& 1\\ y &=& -3+4\\ z &=& -1+1\\ x &=& 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} t &=& 1\\ y &=& 1\\ z &=& 0\\ x &=& 3\end{array}\right.$$

Conclusion : K(3 ; 1 ; 0).

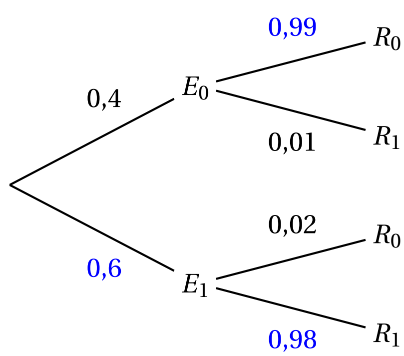
c. Avec B(3; 0; 0) et C(3; 2; 0) on remarque que les coordonnées de K sont les demi-sommes des coordonnées de B et de C, donc que K est le milieu du segment [BC].

EXERCICE 4 7 points

Principaux domaines abordés : probabilités.

On peut compléter l'arbre pondéré :

- E_0 : « le bit envoyé est un 0 »;
- E_1 : « le bit envoyé est un 1 »;
- R_0 : « le bit reçu est un 0 »
- R_1 : « le bit reçu est un 1 ».



On sait que :

$p(E_0) = 0,4; \quad p_{R_0}(R_1) = 0,01; \quad p_{R_1}(R_0) = 0,02.$

On rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B est notée $p_B(A)$.

On peut ainsi représenter la situation par l'arbre de probabilités ci-dessus.

1. $p(E_0 \cap R_0) = p(E_0) \times p_{E_0}(R_0) = 0,4 \times 0,99 = 0,396.$

2. On a aussi $p(E_1 \cap R_0) = p(E_1) \times p_{E_1}(R_0) = 0,6 \times 0,02 = 0,012.$

D'après la loi des probabilités totales : $p(R_0) = p(E_0 \cap R_0) + p(E_1 \cap R_0) = 0,396 + 0,012 = 0,408.$

3. Avec $p\,(R_1) = 1 - p\,(R_0) = 1 - 0,408 = 0,592$;
$p_{R_1}\,(E_0) = \dfrac{p\,(R_1 \cap E_0)}{p\,(R_1)} = \dfrac{p\,(E_0 \cap R_1)}{p\,(R_1)} = \dfrac{0,4 \times 0,01}{0,592} = \dfrac{0,004}{0,592} \approx 0,0067$, soit environ 0,007 au millième près.

4. On a $p(\text{erreur de transmission}) = p\,(E_0 \cap R_1) + p\,(E_1 \cap R_0) = 0,4 \times 0,01 + 0,6 \times 0,02 = 0,004 + 0,012 = 0,016$.

Un message de longueur huit bits est appelé un octet.

On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à 0,88.

5. On a une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$. Si x est la variable aléatoire égal au nombre d'octets transmis sans erreur, on a :
$p(X = 7) = \binom{10}{7} \times 0,88^7 \times (1 - 0,88)^{10-7} = \binom{10}{7} \times 0,88^7 \times (0,12)^3 \approx 0,0847$ soit 0,085 au millième près.

6. On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0,88^0 \times 0,12^{10} = 1 - 0,12^{10}$.

7. On a $p(X = 18) = 0,88^{18} \approx 0,109 > 0,1$. Donc $N_0 = 18$.