# 11 : Calcul intégral

## Exercice 1 : Liban 15

On définit la suite $(u_n)$ pour tout entier naturel *n*, par $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

**1.** Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$.

**2. a.** Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.

**b.** En déduire la valeur exacte de $u_1$.

**3. a.** Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang *n* de la suite $(u_n)$ où *n* est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

```
Demander n
u ←…
Pour i variant de 1 à …
u ← …
Fin de Pour
Afficher u
```

**b.** À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 0,6931 | 0,3069 | 0,1931 | 0,1402 | 0,1098 | 0,0902 | 0,0475 | 0,0099 | 0,0050 |

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite $(u_n)$ peut-on émettre ?

**4. a.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**b.** Démontrer que la suite $(u_n)$ est convergente.

**5.** On appelle *l* la limite de la suite $(u_n)$. Démontrer que $l = 0$.

## Exercice 2 : Métropole 14

### Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $C_1$ la courbe représentative de la fonction $f_1$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + e^{-x}.$$

**1.** Justifier que $C_1$ passe par le point *A* de coordonnées $(0;1)$.

**2.** Déterminer le tableau de variation de la fonction $f_1$. On précisera les limites de $f_1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**Partie B**

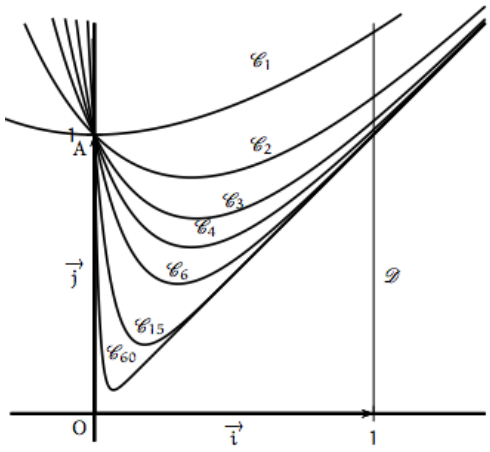
L'objet de cette partie est d'étudier la suite $\left(I_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 \left(x + e^{-nx}\right) dx .$$

**1.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ pour tout entier naturel *n*, on note $C_n$ la courbe représentative de la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n\left(x\right) = x + e^{-nx} .$$

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $C_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier *n* et la droite *D* d'équation $x = 1$.




**a.** Interpréter géométriquement l'intégrale $I_n$.

**b.** En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite $\left(I_n\right)$ et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

**2.** Démontrer que pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - e^x\right) dx .$$

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite $\left(I_n\right)$ est convergente.

**3.** Déterminer l'expression de $I_n$ en fonction de *n* et déterminer la limite de la suite $\left(I_n\right)$.