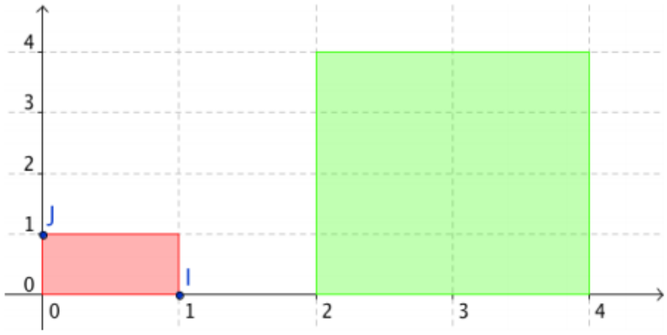
I. Intégrale d'une fonction continue positive

1. Unité d'aire

Dans le repère (O,I,J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1.
Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.

L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.



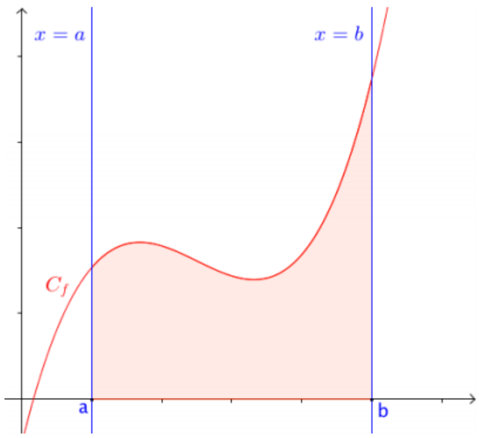
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).

2. Définition

Dans tout ce paragraphe, *f* et *g* sont des fonctions continues et positives sur un intervalle $[a;b]$.
C_f est la courbe représentative de la fonction *f*.

Définition

Soit *f* une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
On appelle intégrale de *f* sur l'intervalle $[a;b]$ le nombre qui exprime l'aire, en ua, du domaine délimité par C_f, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)\,dx$.



Remarques

- $\int_a^b f\left(x\right)dx$ se lit « intégrale de *a* à *b* de $f\left(x\right)dx$.
- *a* et *b* sont les bornes de l'intégrale et *x* est une variable muette ; elle n'intervient pas dans le résultat. On utilise aussi les lettres *t* et *u*. Ainsi, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$.

Exercice 1

Calculer $I = \int_{-2}^{3} 3\,dx$, $J = \int_2^6 \left(x-2\right)dx$ et $K = \int_1^3 \left(5-x\right)dx$.

3. Fonctions de signes quelconque

Définition

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle $\left[a;b\right]$.

On appelle intégrale de *f* sur $\left[a;b\right]$ le nombre $I = \int_a^b f\left(x\right)dx$ défini par :

- Si *f* est positive sur $\left[a;b\right]$: $I = \text{Aire}\left(E\right)$,
- Si *f* est négative sur $\left[a;b\right]$: $I = -\text{Aire}\left(E\right)$,

Où *E* est la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Exercice 2

Calculer $I = \int_2^5 \left(3-x\right)dx$.

4. Propriétés

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I* et *a*, *b*, *c* des réels de *I*.

- $\int_a^a f\left(x\right)dx = 0$
- $\int_b^a f\left(x\right)dx = -\int_a^b f\left(x\right)dx$
- $\int_a^c f\left(x\right)dx + \int_c^b f\left(x\right)dx = \int_a^b f\left(x\right)dx$ (Relation de Chasles)

II. Intégration et primitives

1. Fonction définie par une intégrale

Théorème

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle $\left[a;b\right]$.

La fonction F définie sur $\left[a;b\right]$ par : $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de *f* qui s'annule en a.

Démonstration dans le cas où *f* est strictement croissante

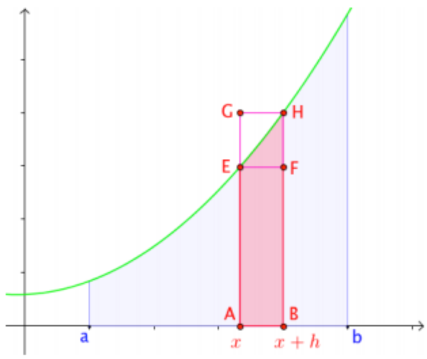
1er cas : $h>0$

On considère deux réels x et $x+h$ de l'intervalle $\left[a;b\right]$.

On veut démontrer que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.

$$\begin{aligned}F(x+h)-F(x)&=\int_a^{x+h}f(x)\,dx-\int_a^x f(x)\,dx\\&=\int_a^{x+h}f(x)\,dx-\int_x^a f(x)\,dx\\&=\int_x^{x+h}f(x)\,dx\end{aligned}$$

On a représenté ci-contre, la courbe de la fonction *f* (en vert). Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.
Elle est comprise entre les aires des rectangles $ABFE$ et $ABHG$.
Or, $Aire(ABFE)=h\times f(x)$ et $Aire(ABGH)=h\times f(x+h)$.



Comme *f* est croissante sur $\left[a;b\right]$, on a :
$h\times f(x)\le F(x+h)-F(x)\le h\times f(x+h)$.

Puisque $h>0$, on a : $f(x)\le\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\le f(x+h)$.

Comme *f* est continue sur $\left[a;b\right]$, $\lim\limits_{h\to 0}f(x+h)=f(x)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.

Et donc : $F'(x) = f(x)$.
F est donc une primitive de f.
Par ailleurs, F s'annule en a, car $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$.

2$^{\text{ème}}$ cas : $h < 0$

La démonstration est analogue, les encadrements sont inversés.

<u>Exercice 3 : Étudier une fonction définie par une intégrale</u>

Soit f la fonction définie sur $[2;10]$ par : $F(x) = \int_2^x \frac{t}{2} dt$.
1. Étudier les variations de F.
2. Déterminer l'expression de $F(x)$ en fonction de x (faire un schéma).

2. <u>Calcul d'intégrales</u>

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

<u>Démonstration</u>

La fonction G définie sur $[a;b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a;b]$ d'après le premier théorème vu plus précédent.
Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a;b]$, on a : $G(x) = F(x) + k$, k un réel.
En effet, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
De plus, $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ et $G(a) = F(a) + k$ donc $k = -F(a)$.
Or $G(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) + k = F(b) - F(a)$.

<u>Définition</u>

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a;b]$.
On appelle intégrale de f sur $[a;b]$ la différence $F(b) - F(a)$.

<u>Notation</u>

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exercice 4 : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

$A=\int_2^3\left(3x^2+2x-1\right)dx$ $\quad B=\int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx$ $\quad C=\int_1^e \frac{dx}{x}$ $\quad D=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$

III. Inégalité et linéarité

1. Inégalité

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels de I avec $a \le b$.

- Si, pour tout x de $\left[a;b\right]$, $0 \le f\left(x\right)$, alors $0 \le \int_a^b f\left(x\right)dx$.
- Si, pour tout x de $\left[a;b\right]$, $f\left(x\right) \le g\left(x\right)$ alors $\int_a^b f\left(x\right)dx \le \int_a^b g\left(x\right)dx$

Exercice 5 : Encadrement d'une intégrale

1. Démontrer que pour tout x de $\left[0;1\right]$, on a : $0 \le e^{x^2} \le e^x$.

2. En déduire que : $0 \le \int_0^1 e^{x^2}\,dx \le e-1$.

2. Linéarité

Propriétés

Soit f et g 2 fonctions continues sur un intervalle I, a et b 2 réels de I.

- Pour tout réel k, on a : $\int_a^b kf\left(x\right)dx = k\int_a^b f\left(x\right)dx$
- $\int_a^b f\left(x\right)+g\left(x\right)dx = \int_a^b f\left(x\right)dx + \int_a^b g\left(x\right)dx$

Exercice 6

On pose : $A=\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx$ et $B=\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx$.

1. Calculer $A+B$ et $A-B$.

2. En déduire A et B.

3. Aire entre deux courbes

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$.
L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à : $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$.

Exercice 7 : Aire entre deux courbes

Déterminer l'aire du domaine compris entre les courbes C_f et C_g représentant les fonctions $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.
On admettra que pour tout $x \in [-1;2]$, $g(x) \geq f(x)$.

IV. Valeur moyenne d'une fonction

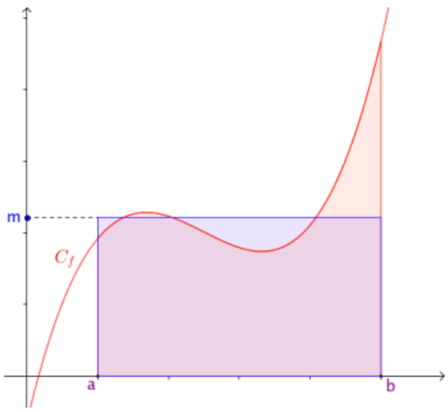
1. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ avec $a \neq b$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le nombre réel $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

2. Interprétation géométrique

Ce nombre correspond à la hauteur du rectangle de base $b - a$ dont l'aire est égale à l'aire sous la courbe C_f sur l'intervalle $[a;b]$.



Exercice 8
Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ sur l'intervalle $[1;5]$.

V. Intégration par parties

Théorème

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $\left[a;b\right]$.

Alors, on a : $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

Démonstration

On a $(uv)' = u'v + uv'$

Donc on a : $uv' = (uv)' - u'v$.

Par passage à l'intégrale, on a :

$$\int_a^b (uv')(x)\,dx = \int_a^b \left[(uv)'(x) - (u'v)(x)\right]dx$$

$$\int_a^b (uv')(x)\,dx = \int_a^b (uv)'(x)\,dx - \int_a^b (u'v)(x)\,dx$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Exercice 9 : Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties

$A = \int_0^\pi x\cos x\,dx$ $\qquad$ $B = \int_0^\pi x^2\sin x\,dx$ $\qquad$ $C = \int_1^e \ln x\,dx$

Exercice 10 : Suite d'intégrales

On considère la suite d'intégrales (I_n) définie pour tout entier *n*, par : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

1. Calculer I_0.

2. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}I_n$.