

10 : Combinatoire et dénombrement**Exercice 1**

Soit $E = \{a, b, c, d\}$.

1. Lister les 2-uplets (ou couples) de E . Combien y en a-t-il ?
2. Quelle formule du cours permet de retrouver ce résultat ?
3. **a.** Lister tous les couples d'éléments distincts de E . Combien y en a-t-il ?
b. Quelle formule du cours permet de retrouver ce résultat ?

Exercice 2

Soit $E = \{a, b, c, d\}$.

1. **a.** Lister les combinaisons de 3 éléments de E .
b. Combien y en a-t-il ?
c. Le nombre de combinaisons de 3 éléments de E est égal à $\binom{4}{3}$. Rappeler une formule permettant de calculer ce coefficient et vérifier le résultat obtenu à la question précédente.
2. **a.** Sans les lister, déterminer le nombre de combinaisons de 2 éléments de E .
b. Vérifier le résultat précédent en listant toutes les combinaisons de 2 éléments de E .

Exercice 3

On s'intéresse aux familles composées de 6 enfants.

On note dans l'ordre des naissances, le sexe des enfants, avec codage : F pour une fille et G pour un garçon.

Par exemple, on note (F, F, F, G, G, F) quand les trois premiers enfants sont des filles, les deux suivants sont des garçons et le dernier enfant est une fille. On appelle cela une fratrie.

Déterminer :

1. Le nombre total de fratries.
2. Le nombre de fratries dont fait partie un garçon
3. Le nombre de fratries dont le 2^e, le 4^e et le 5^e enfant sont des filles.

Exercice 4

Un code PIN de smartphone est un code confidentiel composé de 4 chiffres.

1. Combien y a-t-il de codes PIN différents ?
2. Combien y a-t-il de codes PIN commençant par le chiffre 3 ?
3. Combien y a-t-il de codes PIN commençant par le chiffre 4 et finissant par le chiffre 7 ?
4. Combien y a-t-il de codes PIN commençant par un chiffre impair et finissant par un chiffre pair ?

Exercice 5

1. Soit E un ensemble à 9 éléments.

Combien y a-t-il de 4-uplets d'éléments distincts de E ?

2. Bob doit créer un code de sécurité composé de 6 chiffres sur son smartphone. Il décide de ne jamais utiliser deux fois le même chiffre et de ne jamais utiliser le chiffre 0.

a. Combien de codes peut-il alors créer ?

b. Jérémy a vu son ami taper 5 comme dernier chiffre. Combien de codes différents sont alors possibles s'il veut utiliser son code ?

Exercice 6

1. Soit E ensemble à 9 éléments. Combien y a-t-il de permutations de E ?

2. La première phase de la coupe du monde de handball féminin est organisée en poules de 6 équipes.

a. Combien y a-t-il de classements possibles dans le groupe de la France ?

b. Combien y a-t-il de classements possibles dans ce groupe si la France termine première et l'Australie dernière ?

Exercice 7

1. En Première générale, un élève doit choisir trois spécialités parmi les douze proposées. Combien de triplettes possibles y a-t-il ?

2. En Terminale, les élèves doivent garder deux des trois spécialités choisies en Première. Combien de possibilités s'offrent alors à Jacob qui arrive en terminale pour choisir ses spécialités ?

3. a. Un parcours est constitué d'une triplette de spécialités choisies en première et d'une doublette de ces spécialités conservées en terminale.

Justifier qu'il y a alors 660 parcours différents.

b. Léa a choisi les maths en première et en terminale. Combien de parcours correspondent à ce choix ?

Exercice 8

1. Sarah possède 5 jeans et 7 T-shirts. Elle part en vacances et décide d'emporter 2 jeans et 3 T-shirts.

a. Justifier que le nombre de possibilités qu'elle a pour choisir ses jeans et T-shirts est

$$\binom{5}{2} \times \binom{7}{3}.$$

b. Calculer ce nombre.

2. Son mari Moshé possède quant à lui 10 jeans, 13 T-shirts et 7 paires de chaussures.

Il décide de partir avec 8 jeans, 10 T-shirts et 4 paires de chaussures.

Combien de manières pour remplir sa valise ?

Exercice 9

Une ville comporte 2000 adolescents âgés de 13 à 20 ans. 300 d'entre eux ont déjà assisté à un concert et à un match de football. Au total, 500 ont déjà assisté à un match de football et 450 ont déjà assisté un concert.

1. a. Combien d'adolescents de la commune ont assisté à un match de football mais pas à un concert ?

b. Combien n'ont assisté à aucune de ces activités ?

2. De plus, 805 personnes de plus de 30 ans sont déjà allées au théâtre, 1990 ont déjà assisté à un match de football et 1440 sont déjà allées à un concert.

On annonce aussi que 160 personnes ont déjà assisté aux trois activités, 235 sont allées au théâtre et à un match de football mais pas à un concert et 195 sont allées à un match et à un concert mais pas au théâtre. Enfin, 140 personnes ne sont allées qu'au théâtre et la commune compte 5030 adultes de plus de 30 ans.

a. Déterminer le nombre d'adultes de plus de 30 ans qui n'ont assisté qu'à un concert.

b. Combien d'adultes de plus de 30 ans n'ont assisté à aucune de ces activités culturelles ?

Exercice 10

Une urne contient huit boules : cinq noires, numérotées de 1 à 5, et trois rouges, numérotées 6, 7 et 8. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On extrait cinq boules successivement, avec remise. Déterminer :

a. Le nombre total de tirages.

b. Le nombre de tirages tels que la première boule tirée est noire et la deuxième est rouge

c. Le nombre de tirages tels que la première boule rouge tirée est en troisième position.

2. Reprendre la question 1. dans le cas où on extrait les cinq boules de l'urne successivement et sans remise.

3. On extrait simultanément deux boules de l'urne. Déterminer les probabilités des évènements suivants :

A : « les deux boules tirées sont rouges ».

B : « les deux boules tirées sont de même couleur ».

Les probabilités demandées seront données sous forme de fractions irréductibles.

Exercice 11

Au « Swiss Loto » un joueur doit choisir 6 numéros parmi les 42 numéros de la première grille, puis un des 6 numéros « chance » qui composent la deuxième grille.

1. Combien de grilles différentes peut-on remplir ?

2. Combien de grilles contiennent exactement trois numéros gagnants mais pas le bon numéro « chance » ?

3. Calculer la probabilité qu'une personne qui remplit 6 grilles trouve parmi elles la grille gagnante.

Donner la valeur exacte, puis le résultat en écriture scientifique, avec un chiffre après la virgule.

Exercice 12

Dans une classe de première de 35 élèves, 22 élèves ont choisi les Mathématiques comme spécialité.

Parmi eux, 8 ont également choisi SVT et Physique-Chimie (PC), 6 ont choisi PC mais pas SVT et 5 n'ont choisi aucune de ces deux spécialités. 2 élèves ont choisi SVT et PC mais pas Mathématiques. Au total, 17 ont choisi SVT et 19 ont choisi PC.

Combien d'élèves de la classe n'ont choisi aucune de ces trois spécialités ?

Exercice 13

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.

1. On tire simultanément 3 jetons de ce sac. Combien de tirages différents y a-t-il :

a. au total ?

b. avec 3 jetons blancs ?

c. avec exactement 2 jetons blancs ?

d. avec uniquement des numéros impairs ?

2. David sait qu'il y a 35 manières de choisir simultanément 4 jetons blancs et 21 manières de choisir simultanément 5 jetons blancs. Elle en déduit que si elle avait 8 jetons blancs, elle aurait $35 + 21$, soit 56 manières différentes d'en choisir 5 simultanément. A-t-il raison ? Justifier.

3. Reprendre la question 1. dans le cas on tire les 3 jetons successivement et avec remise.

4. Sarah tire un jeton du sac : c'est le jeton noir numéroté 2. Elle ne le remet pas et doit tirer à nouveau deux jetons successivement et sans remise. Combien de tirages possibles y a-t-il ?

Exercice 14

Partie A

Un sac contient 4 jetons jaunes, numérotés de 1 à 4, 2 jetons rouges numérotés 1 et 2 et 3 jetons bleus numérotés de 1 à 3.

L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 jetons du sac.

1. Le nombre de possibilités de tirer 3 jetons de la même couleur est :

- a. 2 b. 3 c. 5 d. 30

2. Le nombre de possibilités de tirer 3 jetons de couleurs différentes est :

- a. $\frac{4!}{2! \times 3!}$ b. $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$ c. 9 d. 24

Partie B

On dispose d'un jeu de 32 cartes, composé entre autres de 8 cartes « pique » et de 4 as, dont l'as de pique.

1. On tire au hasard deux cartes successivement et sans remise.

Le nombre de tirages différents est :

- a. 63 b. 496 c. 992 d. 1024

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes de ce jeu.

Le nombre de tirages sans « as » ni « pique » est :

- a. 190 b. 210 c. 420 d. 441

Partie C

On considère tous les entiers naturels de 5 chiffres que l'on peut écrire au moyen de 5 jetons numérotés de 1 à 5.

Le nombre de nombres qu'on peut former est :

- a. $5!$ b. 5^5 c. $\binom{5}{5}$ d. 120