10 : Combinatoire et dénombrement

I. Cardinal d'un ensemble et principal additif

1. Cardinal d'un ensemble fini

Le cardinal d'un ensemble E est le nombre d'éléments de E. On le note $\text{card}(E)$.

Exemple

- $E=\{a;b;c\}$ est un ensemble fini à 3 éléments.
- $\varnothing$ est appelé ensemble vide. $\text{card}(\varnothing)=0$

2. Principe additif

Définition

2 ensembles A et B dont l'intersection est vide sont disjoints. On note $A\cap B=\varnothing$.

Propriété

Si E_0, E_1, ..., E_p sont p ensembles finis deux à deux disjoints, alors :
$\text{card}\left(E_1\cup E_2\cup\ldots\cup E_p\right)=\text{card}\left(E_1\right)+\text{card}\left(E_2\right)+\ldots+\text{card}\left(E_p\right)$

Exemple

$A=\{a;b;c\}$ et $B=\{d;e\}$.
On a $A\cap B=\varnothing$ donc A et B sont disjoints.
$A\cup B=\{a;b;c;d;e\}$, donc $\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)=3+2=5$.

Application 1

On interroge un groupe de skieurs, et on a :
14 skieurs pratiquent le ski de piste, 7 pratiquent le ski de fond, 4 pratiquent les deux sports.
3 ne pratiquent rien.
Combien de skieurs y a-t-il dans ce groupe ?

Faire un diagramme (réponse : 20)

Application 2

Parmi 40 secrétaires, 8 connaissent le russe, 15 l'anglais et 9 l'allemand. D'autre part, 4 parlent l'anglais et l'allemand, 5 l'anglais et le russe, 2 l'allemand et le russe et 2 les trois langues.
Combien de secrétaires ne connaissent aucune de ces trois langues ?

3. Produit cartésien

E, F et G sont trois ensembles.

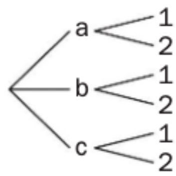
- Le produit cartésien de E par F est l'ensemble des couples (a,b) où $a \in E$ et $b \in F$. Il est noté $E \times F$.
- Le produit cartésien $E \times F \times G$ est l'ensemble des triplets (a,b,c) où $a \in E$, $b \in F$ et $c \in G$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ est l'ensemble des p-uplets $(a_1, a_2, ..., a_p)$ où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$, …, $a_p \in E_p$.

Notation

$E^2 = E \times E$ $\qquad$ $E^k = \underbrace{E \times E \times ... \times E}_{k \text{ fois}}$

Exemple

- $E = \{a;b;c\}$ et $F = \{1;2\}$. Alors $E \times F = \{(a,1);(a,2);(b,1);(b,2);(c,1);(c,2)\}$.
  On peut représenter le produit cartésien par un arbre :



  Un élément de $E \times F$ est un chemin de l'arbre.
- (a,b,a,c,b) est un 5-uplet de E. $(a,b,a,c,b) \in E^5$.
- $E^2 = \{(a,a);(a,b);(a,c);(b,a);(b,b);(b,c);(c,a);(c,b);(c,c)\}$

4. Principe multiplicatif

Propriété

- Si $E_1, E_2, ..., E_p$ sont p ensembles finis, alors :
  $\text{card}(E_1 \times E_2 \times ... \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times ... \times \text{card}(E_p)$
- Si $\text{card}(E) = n$, alors $\text{card}(E^p) = n^p$

Exemple

On reprend l'exemple précédent.
$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F) = 3 \times 2 = 6$ $\qquad$ $\text{card}(E^2) = 3^2 = 9$
$\text{card}(E^5) = 3^5 = 343$ c'est le nombre de 5-uplets d'éléments de E.

Application 3

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats et 2 desserts.
1. Combien de menus différents sont composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert ?
2. Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

Application 4

Pour ouvrir un coffre-fort il faut rentrer la bonne combinaison constituée de 2 lettres et de 4 chiffres.
1. Combien y a-t-il de combinaisons différentes ?
2. Combien y a-t-il de combinaisons différentes :
a. sachant qu'elle se termine par 5 ?
b. sachant qu'elle se termine par un chiffre pair ?
c. sachant qu'elle commence par la lettre C ?
d. sachant qu'elle commence par la lettre F et se termine par le nombre 25 ?

Application 5

Jacob a 26 stylos au fond de son sac. Parmi eux, 14 sont des stylos à bille, 11 n'ont plus d'encre, 5 ne sont ni des stylos à bille, ni vides.
Combien Jacob a-t-elle de stylos à bille vides dans son sac ?

(Tableau à double entrées)

II. Arrangements et permutations

n et *p* sont des nombres entiers naturels avec $p \leq n$. *E* est un ensemble à *n* éléments.

1. Factoriel

Définition

On appelle factorielle *n* et on note $n!$, le produit de tous les nombres entiers de 1 à *n*.

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$$

TI Nspire : Menu – 5 – 1

2. Arrangement

Définition

Un arrangement de *p* éléments d'un ensemble *E* est un *p*-uplet d'éléments distincts de *E*.

Exemple

On considère l'ensemble $A = \{b; j; n; o; r; u\}$.
(j,o,u,r) et (b,u,r,o) sont des arrangements de 4 éléments de A.
(b,o,n), (r,o,u) et (b,u,j) sont des arrangements de 3 éléments de A.
(b,o,n,j,o,u,r) n'est pas un arrangement de A car l'élément o est répété 2 fois.
C'est un 7-uplet de A.

Remarques

- L'ordre compte
- Pas de répétitions

Propriété

Le nombre d'arrangements de p éléments de E est :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemples

- $A = \{b; j; n; o; r; u\}$. Pour former un 4-uplet (ou quadruplet) d'éléments distincts de A, on a 6 choix pour la 1$^{\text{ère}}$ lettre, puis 5 choix pour la 2$^{\text{ème}}$ lettre (car il n'y a pas de répétition), puis 4 choix pour la 3$^{\text{ème}}$ lettre et enfin 3 choix pour la 4$^{\text{ème}}$ lettre.
  En appliquant le principe multiplicatif, le nombre d'arrangements de 4 éléments de A est $6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$.

- On s'intéresse au classement des trois gagnants dans un tournoi de jeux vidéo opposant huit joueurs, c'est-à-dire aux trois joueurs arrivés en tête et à leur ordre d'arrivée. En notant B l'ensemble des huit joueurs, les classements sur le podium possibles sont les arrangements de trois éléments de B : il y en a $\frac{8!}{(8-3)!} = 336$.

TI Nspire : Menu – 5 – 2

Application 6

Lors d'une course automobile, il y a 15 pilotes.
On regarde les 5 premiers.
Combien y a-t-il d'arrivées possibles ?

Réponse

Une arrivée doit désigner 5 pilotes parmi 15, puis les classer de la 5ème place jusqu'à la première.
Il s'agit donc d'un choix de 5 éléments parmi 15, en tenant compte de l'ordre.
Une arrivée constitue ainsi un arrangement de 5 éléments parmi 15 c'est un 5-uplet d'éléments distincts d'un ensemble à 15 éléments.
Il y en a $\frac{15!}{(15-5)!} = 360360$.

3. Permutation

Définition

Une permutation de *E* est un arrangement des *n* éléments de *E*.

Exemple

On considère l'ensemble $G = \{a;b;c\}$
$(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)$ sont les 6 permutations de *G*.

Propriété

Le nombre de permutations de *E* est $n!$

Exemple

On considère l'ensemble $A = \{b;j;n;o;r;u\}$.
Le nombre de permutations de *A* est $6! = 720$

Application 7

Bob souhaite ranger verticalement sur une même étagère 5 livres de biologie, 3 livres de mathématiques et 2 livres d'histoire.
1. Combien existe-t-il de façons différentes de les ranger ?

2. Combien existe-t-il de façons différentes de les ranger en les groupant par matière ?

Réponse

1. Le nombre total de livres est 10.
Le nombre de façons de ranger ces 10 livres est égal au nombre de permutations dans un ensemble à 10 éléments, c'est-à-dire : $10! = 3628800$.

2. Bob doit d'abord choisir l'ordre des matières.
Il y a 3 matières. Le nombre d'ordres possibles pour les 3 matières est $3! = 6$.

Bob possède 5 livres de biologie. Le nombre d'ordres différents pour ranger ces 5 livres est $5! = 120$.
De même, le nombre de permutations pour les livres de mathématiques est $3! = 6$.
Le nombre de permutations pour les livres d'histoire est $2! = 2$.
Donc, d'après le principe multiplicatif, le nombre total de façons différentes de ranger les livres groupés par matière est : $6 \times 120 \times 6 \times 2 = 8640$.

Exercice 1

Une course hippique oppose 17 chevaux.
1. Un tiercé gagnant consiste à donner les 3 chevaux arrivés en tête parmi les 17 chevaux participant à la course, ainsi que l'ordre d'arrivée de ces trois chevaux.
Combien de tiercés différents existe-t-il pour cette course ?

2. Combien de quintés (5 chevaux arrivés en tête, en tenant compte de l'ordre d'arrivée) différents existe-t-il pour cette course ?

III. Combinaison

1. Combinaison d'éléments d'un ensemble

Définition

Une combinaison de p éléments de E est un sous-ensemble de E possédant p éléments.

Exemple

Si $E = \{\text{bleu ; rouge ; orane ; noir ; vert}\}$, alors les ensembles $(\text{bleu , noir , vert})$ et $(\text{noir , orange , bleu})$ sont deux combinaisons de 3 éléments de E.

Remarques

- L'ordre ne compte pas
- Pas de répétitions

2. Calcul du nombre de combinaisons

Soit E un ensemble à n éléments.

Le nombre de combinaisons de p éléments de E, noté $\binom{n}{p}$ est égal à :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots \times 2 \times 1}$$

$\binom{n}{p}$ s'appelle aussi coefficient binomial.

TI Nspire : Menu – 5 – 3

Cas particuliers

Pour tout entier naturel n :

$$\binom{n}{0}=1 \qquad \binom{n}{n}=1 \qquad \binom{n}{1}=n$$

Exercice 2

Une classe composée de 18 filles et 16 garçons va élire les 4 délégués.
Dans cet exercice, on ne distingue pas les délégués et les délégués-adjoints.
1. Combien existe-t-il de possibilités pour cette élection ?

2. Emma dit qu'elle ne souhaite pas être élue si Bastien est élu. Dans ces conditions, combien existe-t-il de possibilités ?

Réponse

1.On compte le nombre de combinaison de 4 élèves parmi $18+16=34$ élèves, soit $\binom{34}{4}=46376$ possibilités.

2. On commence par compter le nombre de possibilités tel que Emma et Bastien sont élus.
Si Emma et Bastien sont élus, il reste à choisir 2 élèves parmi 32, soit $\binom{32}{2}=496$.
Ainsi dans ce cas, le nombre de possibilités est égal à $46376-496=45880$.

Propriétés

- Symétrie : $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$
- Relation de Pascal : $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$

Démonstration

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!}{p!(n-p)!}+\frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}$$

$$=\frac{n!}{p!(n-p-1)!(n-p)}+\frac{n!}{(p)!(p+1)(n-p-1)!}$$

$$= \frac{n!(p+1)}{p!(n-p-1)!(n-p)} + \frac{n!(n-p)}{p!(p+1)(n-p-1)!}$$

$$= \frac{n!(p+1+n-p)}{p!(n-p-1)!(n-p)(p+1)}$$

$$= \frac{n!(n+1)}{p!(p+1)(n-p-1)!(n-p)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!}$$

$$= \binom{n+1}{p+1}$$

3. Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux rapidement :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

4. Parties d'un ensemble

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de partie de E est :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Démonstration

Le nombre de sous-ensemble de E est égal à la somme des sous-ensembles à 0 éléments, à 1 éléments, à 2 éléments, …, à n éléments.
Soit : $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}$

Par ailleurs, pour construire un sous-ensemble de E, on considère n étapes où à chaque élément de E, on décide de le choisir ou de ne pas le choisir pour l'inclure dans le sous-ensemble.
Il y a donc deux possibilités par étape et il y a n étapes.
Il y a donc $2\times 2\times ...\times 2$ (n facteurs) possibilités de construire un sous-ensemble de E, soit 2^n.

Donc $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=2^n$

Exemple

Soit : $E=\{1;2;3\}$.
Alors toutes les parties de E sont :
$\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\};\{1,2\};\{1,3\};\{2,3\};\{1,2,3\}$.
Il y a donc 8 parties de E, en effet $2^3=8$.

Exercice 3

On dispose d'un jeu de 32 cartes.
Combien de façons différentes existe-t-il de choisir :
1. 7 cartes parmi les 32 ?

2. 13 cartes dans le jeu ?

3. 3 cartes parmi les 8 cœurs ?

4. 2 cartes parmi les 8 piques ?

5. une main de 5 cartes contenant 3 cœurs et 2 piques ?

Réponses

1. Le nombre de façons de choisir 7 cartes parmi 32 est $\binom{32}{7}=3365856$.

2. Le nombre de façons de choisir 13 cartes parmi $\binom{32}{13}=347373600$.

3. Le nombre de façons de choisir 3 cartes parmi les 8 cœurs est $\binom{8}{3}=56$.

4. Le nombre de façons de choisir 2 cartes parmi les 8 piques est $\binom{8}{2} = 28$.

5. Pour chaque façon de choisir 3 cœurs, il y a 28 façons de choisir 2 piques.
Par principe multiplicatif, le nombre de mains différentes contenant 3 cœurs et 2 piques est donc $56 \times 28 = 1568$.

Exercice 4

Remplir une grille de loto consiste à choisir cinq numéros entre 1 et 49 (l'ordre ne compte pas), puis un numéro « chance » de 1 à 10.
1. Combien de grilles différentes peut-on remplir ?

2. Parmi ces grilles, combien seront constituées uniquement de nombres pairs ?

Réponses

1. Le nombre de grilles est $\binom{49}{5} \times \binom{10}{1} = 19068840$.
2. Il y a 24 nombres pairs parmi les 49 et 5 parmi les 10.
Donc le nombre de grilles constituées de nombres pairs est $\binom{24}{5} \times \binom{5}{1} = 212520$.

Exercice 5 (contrée)

On considère le jeu de la contrée.
Parmi les 32 cartes on en choisit 8 pour former une main.
1. Combien il y a de mains possibles ?

2. Combien il y a de mains de la même couleur ?

3. Combien il y a de mains contenant 4 as ?

4. Combien il y a de mains constituées de 2 couleurs différentes ?

Réponses

1. $\binom{32}{8} = 10518300$ mains possibles.
2. Pour obtenir une main de la même couleur, il y a 4 possibilités : 8 cœurs, 8 piques, 8 trèfles, 8 carreaux.
Pour obtenir 8 cœurs : $\binom{8}{8} = 1$
Donc il y a 4 mains de la même couleur.
($p = \dfrac{4}{10518300} \approx 0{,}00000038$ environ 1 fois toutes les 2 500 000 fois environ)

3. $\binom{4}{4}\times\binom{28}{4}=20475$

($p=\dfrac{20475}{10518300}\approx 0{,}0019$ soit 1 fois toutes les 500 fois environ)

4. Choix de 2 couleurs parmi 4 : $\binom{4}{2}=6$

Obtenir 2 couleurs : 1-7 ou 2-6 ou 3-5 ou 4-4 ou 5-3 ou 6-2 ou 7-1

Donc $2\times\binom{8}{1}\times\binom{8}{7}+2\times\binom{8}{2}\times\binom{8}{6}+2\times\binom{8}{3}\times\binom{8}{5}+\binom{8}{4}\times\binom{8}{4}=12868$

($p=\dfrac{12868}{10518300}\approx 0{,}0012$ soit 1 fois toutes les 800 fois environ)