

Exercices sur la géométrie

Exercice 1 : Polynésie 14

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(5; -5; 2), B(-1; 1; 0), C(0; 1; 2) \text{ et } D(6; 6; -1).$$

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD) .

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD) .

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A .

4. Déterminer les coordonnées du point H , intersection de la droite D et du plan (BCD) .

5. Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3} B \times h$,

où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur correspondante.

6. On admet que $AB = \sqrt{76}$ et $AC = \sqrt{61}$.

Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle BAC .

Exercice 2 : Amérique du sud 2015

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B et C sont définis par leurs coordonnées : $A(3; -1; 4)$, $B(-1; 2; -3)$ et $C(4; -1; 2)$.

Le plan P a pour équation cartésienne : $2x - 3y + 2z - 7 = 0$.

La droite Δ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 4 - t \\ z = -8 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 1 : Les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

Affirmation 2 : Les points A, B, C déterminent un plan et ce plan a pour équation cartésienne $2x + 5y + z - 5 = 0$.

Affirmation 3 : Tous les points dont les coordonnées $(x; y; z)$ sont données par

$$\begin{cases} x = 1 + s - 2s' \\ y = 1 - 2s + s' \\ z = 1 - 4s + 2s' \end{cases}, s \in \mathbb{R}, s' \in \mathbb{R} \text{ appartiennent au plan } P.$$

Affirmation 4 : Il existe un plan parallèle au plan P qui contient la droite Δ .

Exercice 3 : Métropole 2015

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points $A(0; -1; 5)$, $B(2; -1; 5)$, $C(11; 0; 1)$ et $D(11; 4; 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde. Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.

A l'instant $t = 0$, le point M est en A et le point N est en C .

On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.

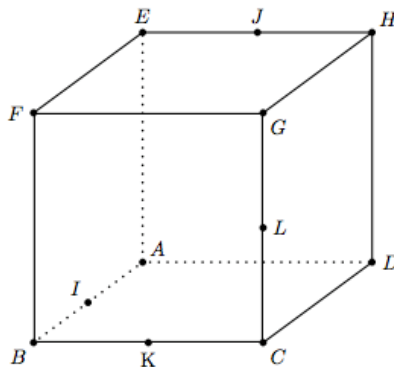
On admet que M_t et N_t ont pour coordonnées : $M_t(t; -1; 5)$ et $N_t(11; 0, 8t; 1 + 0, 6t)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. a. La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI) , (OJ) ou (OK) . Lequel ?
- b. La droite (CD) se trouve dans un plan P parallèle à l'un des plans (OIJ) , (OIK) ou (OJK) . Lequel ? On donnera une équation de ce plan P .
- c. Vérifier que la droite (AB) , orthogonale au plan P , coupe ce plan au point $E(11; -1; 5)$.
- d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
2. a. Montrer que $M_t N_t^2 = 2t^2 - 25, 2t + 138$.
- b. À quel instant t la longueur $M_t N_t$ est-elle minimale ?

Exercice 4 : Liban 2015

$ABCDEFGH$ est un cube.



I est le milieu du segment $[AB]$, J est le milieu du segment $[EH]$, K est le milieu du segment $[BC]$ et L est le milieu du segment $[CG]$.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a. Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK) .
- b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK) .
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD) .
3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK) . Déterminer les coordonnées du point M .
4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.
5. Calculer le volume du tétraèdre $FIJK$.
6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

Exercice 5

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(3;0;10)$, $B(0;0;15)$ et $C(0;20;0)$.

1. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .
- b. Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point $E(9;0;0)$.
- c. Justifier que les points A , B et C ne sont pas alignés.
2. Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC .
 - a. Justifier que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH) . En déduire que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC .
 - b. Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH) .
 - c. Vérifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $20x + 9y + 12z - 180 = 0$.
 - d. Montrer que le système
$$\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$$
 a une solution unique. Que représente cette solution ?
 - e. Calculer la distance OH , en déduire que $EH = 15$ et l'aire du triangle EBC .
3. En exprimant de deux façons le volume du tétraèdre $OEBC$, déterminer la distance du point O au plan (ABC) . Pouvait-on prévoir le résultat à partir de l'équation obtenue en 2. c. ?

Exercice 6 : Nouvelle Calédonie 2016

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère pour tout réel m , le plan P_m d'équation $\frac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \frac{1}{2}mz - 3 = 0$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point $A(1;1;1)$ appartient-il au plan P_m ?
2. Montrer que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique :

$$(d) \begin{cases} x = 12 - 2t \\ y = 9 - 2t \\ z = t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

3. a. Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.

b. Justifier que pour tout réel m , le point B appartient au plan P_m .

c. Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m .

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que :

$$-10 \leq m \leq 10 \text{ et } -10 \leq m' \leq 10.$$

On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

a. Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

b. Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si

$$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{mm'}{4} = 0.$$

c. On donne l'algorithme suivant :

```

Variables :   m et m' entiers relatifs
Traitement : Pour m allant de -10 à 10 :
                Pour m' allant de -10 à 10 :
                    Si (mm')2 + 16(m-1)(m'-1) + 4mm' = 0
                        Alors Afficher (m; m')
                    Fin du Pour
                Fin du Pour
    
```

Quel est le rôle de cet algorithme ?

d. Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4;1)$, $(0;1)$ et $(5;-4)$.

Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.

Exercice 7 : Pondichéry 2013

Pour chacune des questions, quatre propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions indiquer, sans justification, la bonne réponse sur la copie.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation $x - 2y + 3z + 5 = 0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$$

La droite (D) a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

On donne les points de l'espace $M(-1; 2; 3)$ et $N(1; -2; 9)$.

1. Une représentation paramétrique du plan (P) est :

a. $\begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$ b. $\begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$ c. $\begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$ d. $\begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$

2. a. La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point $A(-8 ; 3 ; 2)$.

b. La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.

c. La droite (D) est une droite du plan (P) .

d. La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.

3. a. La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.

b. La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.

c. La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.

d. La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.

4. a. Les plans (P) et (S) sont parallèles.

b. La droite (Δ) de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$$
 est la droite d'intersection des

plans (P) et (S) .

c. Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S) .

d. Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.