09 : Produit scalaire de l'espace

I. Produit scalaire de deux vecteurs

1. Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe un plan P contenant les points A, B et C.

Définition

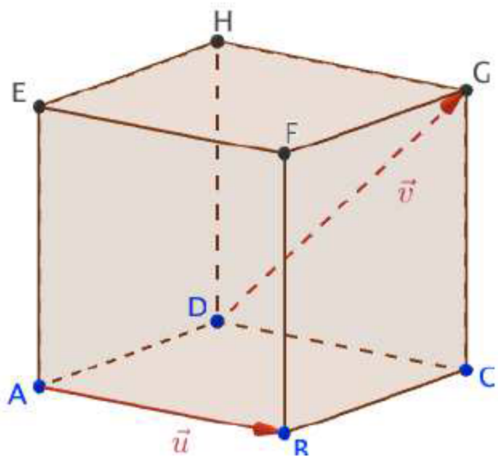
On appelle produit scalaire de l'espace de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit $\vec{u}.\vec{v}$ égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan P.

On a ainsi :

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$

Exemple

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.
$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$
$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$
$= AB \times AB$
$= a^2$



2. Propriétés

Les propriétés dans le plan sont conservées dans l'espace.

Propriété

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

- $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.\left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $\left(k\vec{u}\right).\vec{v} = \vec{u}.\left(k\vec{v}\right) = k \times \left(\vec{u}.\vec{v}\right)$, $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Il existe un plan P tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admettent des représentants dans P.
Dans le plan, les règles de géométrie plane sur les produits scalaires s'appliquent.

3. Expression du produit scalaire en repère orthonormal

Propriété

Dans un repère orthonormé de l'espace :

- Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ est $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'+zz'$.
- La norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Démonstration

On écrit $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$

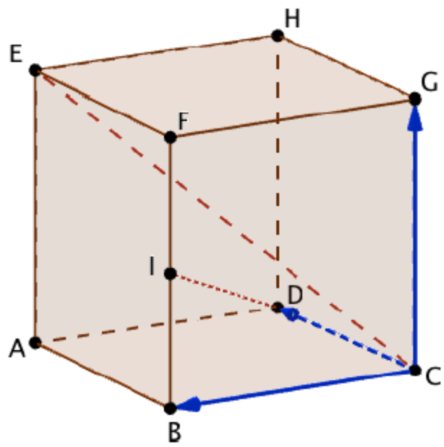
Exemple

On considère le repère orthonormé de l'espace $\left(C;\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CG}\right)$.

On a $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}1-0\\0-1\\0,5-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}1\\-1\\0,5\end{pmatrix}$.

Alors $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{DI} = 1\times1+1\times(-1)+1\times0,5 = 0,5$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ ne sont pas orthogonaux.



Exercice 1

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de côté a, I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AD]$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{CD}$.

2. En calculant de 2 façons différentes $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DI}$, déterminer une valeur approchée de l'angle $\widehat{ADI}$. ($\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}.\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right) = ... = DA.DI.\cos\left(\widehat{ADI}\right)\ldots\ \widehat{ADI} \approx 54,7°$)

II. Orthogonalité dans l'espace

Par définition, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux si $\vec{u}.\vec{v}=0$.
En particulier, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de l'espace.

1. Droites orthogonales

Propriété

Soit deux droites D et D' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a l'équivalence :
D est orthogonale à $D' \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$.

Application 1

Montrer que les droites D et D' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ sont orthogonales.

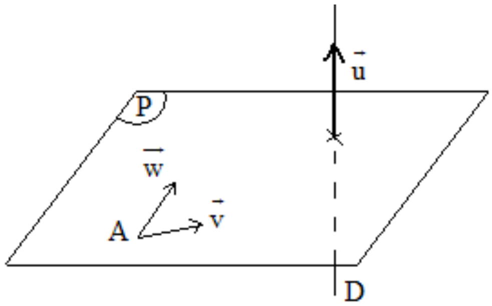
Application 2

Soit les points $A(1;2;3)$, $B(-1;0;2)$, $C(2;3;1)$ et $D(1;4;1)$.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

2. Droite orthogonale à un plan

Propriété

- Si une droite D est orthogonale à 2 droites sécantes d'un plan P, alors D est orthogonale à toute droite de P.
  On dit que D est orthogonale au plan P.



- Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de D et un plan P de repère $\left(A;\vec{v},\vec{w}\right)$ ($\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires).
  On a l'équivalence $D \perp P \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$ et $\vec{u}.\vec{w}=0$.

Exercice 2

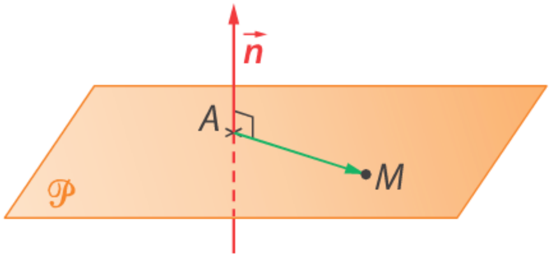
Soit $ABCDEFGH$ un cube. On se place dans le repère orthonormal $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{ED}$.

2. Démontrer que (AG)et orthogonal à (BED).

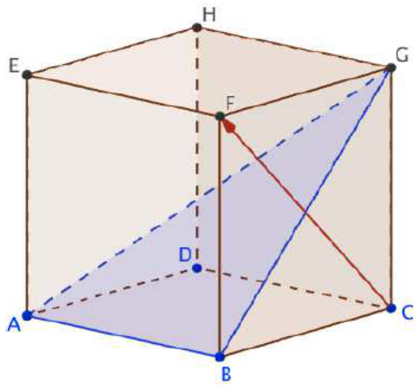
3. Vecteur normal à un plan

- Par définition, un vecteur normal à un plan P est un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan P.
- Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
  L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.



Application 1

ABCDEFGH est un cube.
Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG).



Réponse

Utiliser les coordonnées des vecteurs bien choisis dans un repère bien choisi.

Application 2

On donne $A(1;2;-2)$, $B(-1;3;1)$ et $C(2;0;-2)$.
Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

4. Équation cartésienne d'un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ non nul admet une équation de la forme

$ax+by+cz+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$.

Réciproquement, si a, b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que

$ax+by+cz+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$, est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Exemple

Le plan d'équation $x - y + 5z + 1 = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Application 3

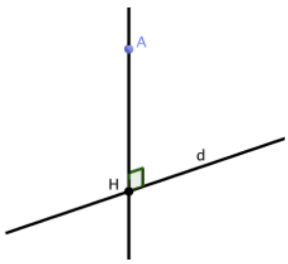
Dans un repère orthonormé, déterminer une équation du plan P passant par le point $A(-1;2;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

III. Projection orthogonale

1. Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition

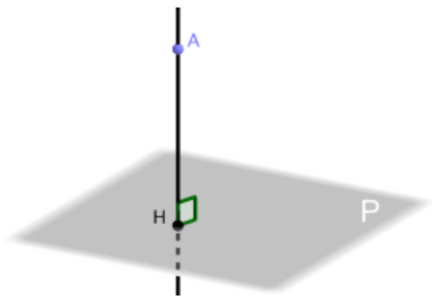
Soit un point A et une droite d de l'espace.
La projection orthogonale de A sur d est le point H appartenant à d tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite d.



2. Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition

Soit un point A et un plan P de l'espace. La projection orthogonale de A sur P est le point H appartenant à P tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan P.

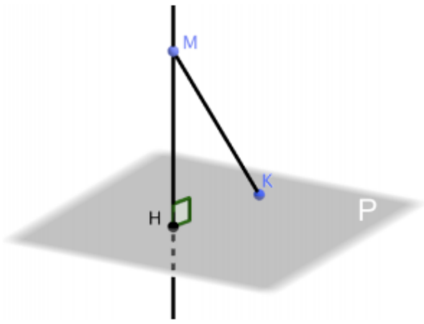


Propriété

Le projeté orthogonal d'un point *M* sur un plan *P* est le point de *P* le plus proche de *M*.

Démonstration au programme

Soit *H* le projeté orthogonal du point *M* sur le plan *P*.
Supposons qu'il existe un point *K* du plan *P* plus proche de *P* que l'est le point *H*.
$KM \leq HM$ car *K* est le point de la droite le plus proche de *M*.
Donc $KM^2 \leq HM^2$.
Or, (MH) est orthogonale à *P*, donc (HK) est orthogonale à toute droite de *P*. En particulier, (MH) est perpendiculaire à (HK). Le triangle *MHK* est donc rectangle en *H*.
D'après l'égalité de Pythagore, on a : $KM^2 = KH^2 + HM^2$.
Donc $KH^2 + HM^2 \leq HM^2$. Donc $KH^2 \leq 0$. Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point *K* est le point *H*.
On en déduit que *M* est le point du plan le plus proche du point *P*.



Application

On considère un cube *ABCDEFGH*.
Calculer la distance du point *G* au plan *BDE*.

Réponse

Soit *I* le projeté orthogonal du point *G* sur le plan *BDE*. La distance du point *G* au plan *BDE* est égale à la longueur *GI*.
On considère le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On détermine les coordonnées des points *B*, *D*, *E*, *G* avec $I(x; y; z)$...

On pose $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{GI} = 0$, $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{GI} = 0$ et $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{GI} = 0$.

Donc $I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ et $IG = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

IV. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété

L'espace est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k}\right)$.

Soit une droite passant par un point $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On a : $M\left(x;y;z\right)\in d \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$

Remarque : Ce système s'appelle une représentation paramétrique de la droite d.

Exercice 3
Dans un repère orthonormé, le plan P a pour équation $2x - y + 3z - 2 = 0$.
Soit deux points $A\left(1;2;-3\right)$ et $B\left(-1;2;0\right)$.

1. Démontrer que la droite $\left(AB\right)$ et le plan P sont sécants.

2. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 4
Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives
$-x + 2y + z - 5 = 0$ et $2x - y + 3z - 1 = 0$.

1. Démontrer que les plans P et P' sont sécants.

2. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection d.

Exercice 5
Dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j};\vec{k}\right)$ de l'espace, on donne :
$A\left(0;1;-1\right)$, $B\left(2;1;-2\right)$ et $C\left(1;0;-2\right)$

1. Démontrer que les points déterminent un plan.

2. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal du plan $\left(ABC\right)$.

3. Déterminer une équation du plan $\left(ABC\right)$.

4. Déterminer une équation du plan P parallèle au plan $\left(ABC\right)$ passant par $D\left(-1;2;1\right)$.

5. Déterminer une équation du plan P' perpendiculaire au plan $\left(ABC\right)$ passant par $E\left(1;2;3\right)$.