08 : Vecteurs, Droites et plans de l'espace

I. Vecteurs de l'espace

1. Notion de vecteur dans l'espace

Définition

Un vecteur de l'espace est défini par une direction, un sens et une norme (longueur).

Remarque

Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : relation de Chasles, colinéarité…

2. Translation

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.
On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ la transformation qui au point M associe le point M', tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Remarque

Les translations gardent les mêmes propriétés qu'en géométrie plane : conservation du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu…

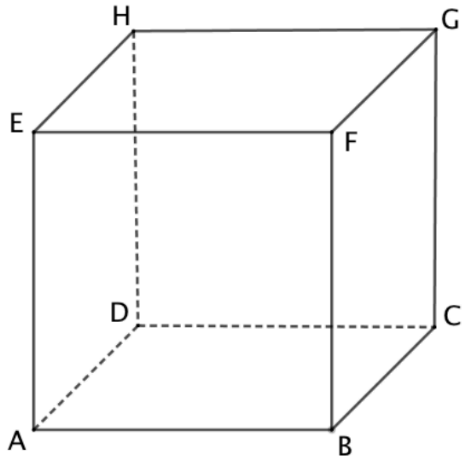
3. Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace

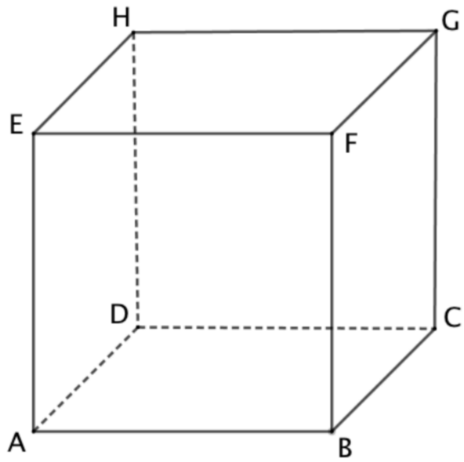
Définition

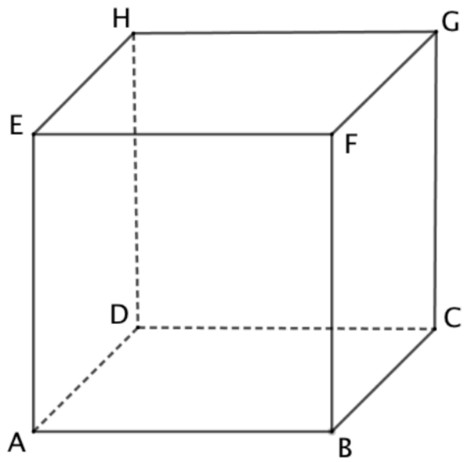
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Tout vecteur de la forme $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}$, avec α, β et γ réels, est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 1

A l'aide du cube ci-contre, représenter les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ donnés par :
$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$
$\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$
$\vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$

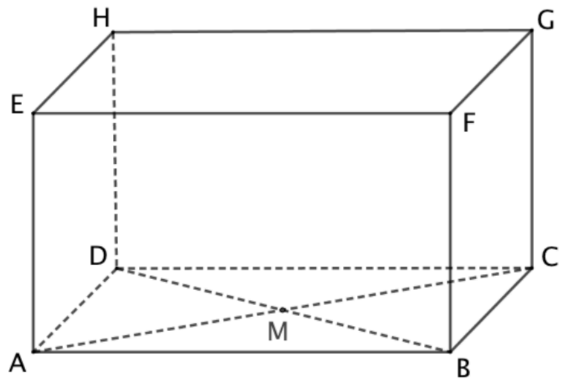

H
G
E
F
D
C
A
B


H
G
E
F
D
C
A
B


H
G
E
F
D
C
A
B

Exercice 2

Dans le parallélépipède ci-contre, M est le centre du rectangle $ABCD$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.



II. Droites de l'espace

1. Vecteurs colinéaires

Définition

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'ils ont même direction c'est à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

2. Vecteur directeur d'une droite

Définition

On appelle vecteur directeur de d tout vecteur non nul qui possède la même direction que la droite d.

Propriété

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.
La droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Propriété

Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

III. Plans de l'espace

1. Direction d'un plan de l'espace

Propriétés

Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d'un plan.

2. Caractérisation d'un plan de l'espace

Propriété

Soit un point A et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarque

- Dans ces conditions, le triplet $\left(A, \vec{u}; \vec{v}\right)$ est un repère du plan.
- Un plan est donc totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Propriété

Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Conséquence

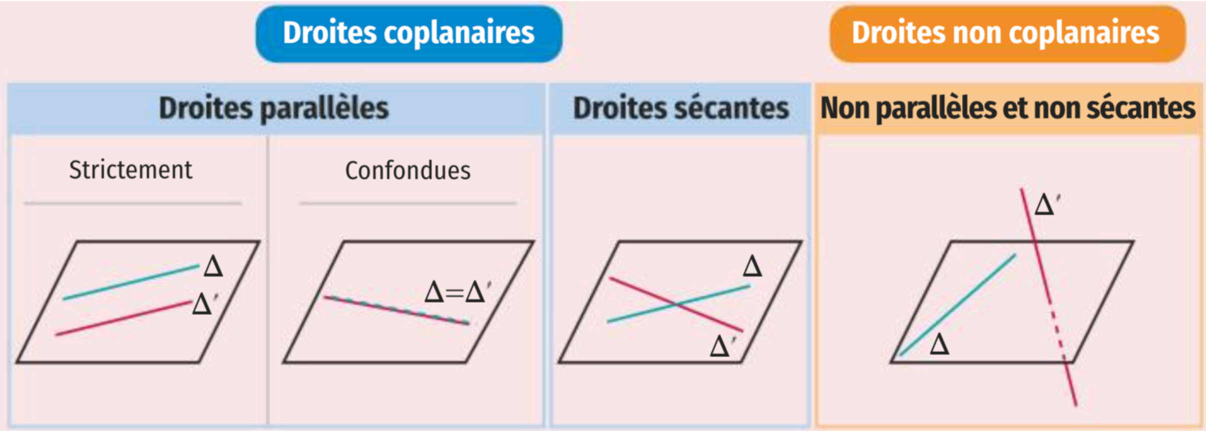
Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que deux vecteurs non colinéaires de l'un des plans sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre.

IV. Positions relatives de droites et de plans de l'espace

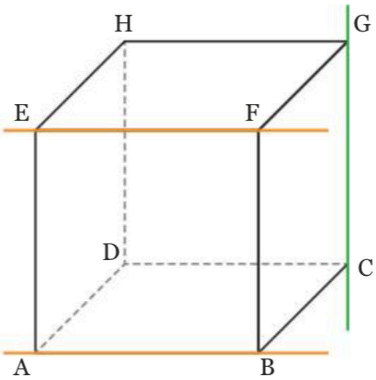
1. Positions relatives de deux droites

Propriété

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.



Exemple

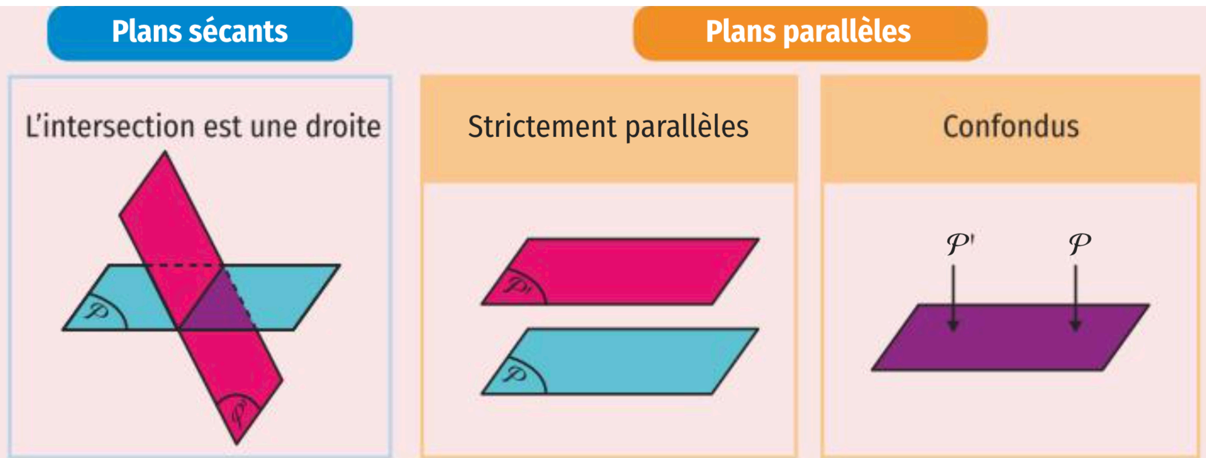


- Les droites $\left(AB\right)$ et $\left(EF\right)$ sont parallèles (donc coplanaires).
- Les droites $\left(EF\right)$ et $\left(EH\right)$ sont sécantes en E (donc coplanaires).
- Les droites $\left(EF\right)$ et $\left(CG\right)$ sont non coplanaires.

2. Positions relatives de deux plans

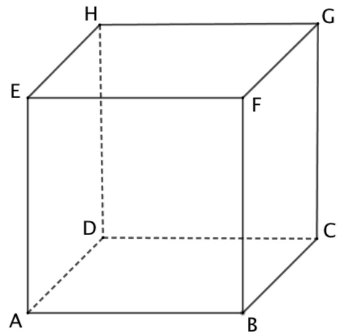
Propriété

Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.



Exemple

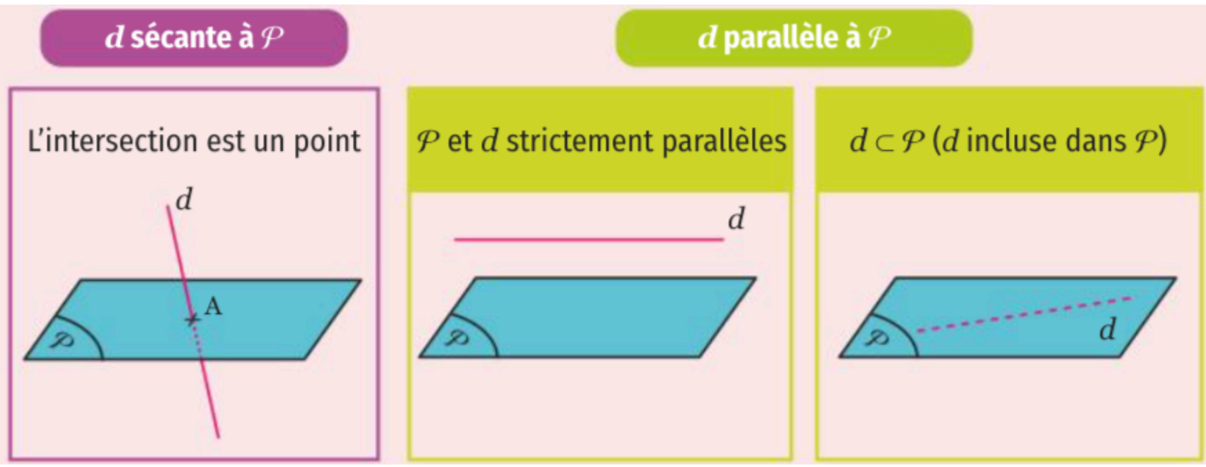
- Les plans (ABC) et (EGH) sont parallèles.
- Les plans (ADH) et (BCE) sont sécants selon la droite (EH).



3. Positions relatives d'une droite et d'un plan

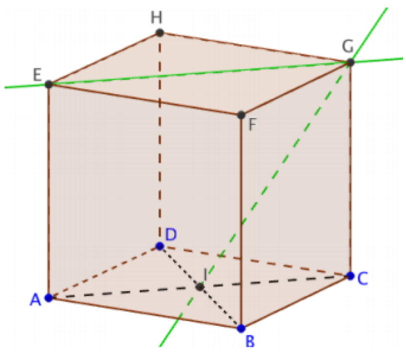
Propriété

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.



Exemple

- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I.
- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.



Application 1

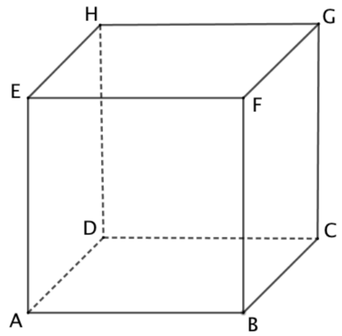
Donner la position relative dans chacun des cas suivants :

1. Les droites (CD) et (EH)

2. La droite (AB) et le plan (CFH)

3. Les plans (CFH) et (ABD)

4. Les plans (CFH) et (BDE)



V. Bases et repères de l'espace

1. Vecteurs coplanaires et bases de l'espace

Définition

Trois vecteurs sont coplanaires s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.

Propriété

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires, s'il existe un couple de réels $(x;y)$ tel que $\vec{u}=x\vec{v}+y\vec{w}$.

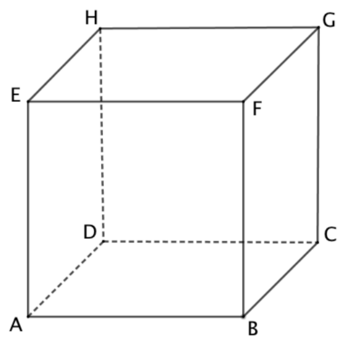
2. Base

Définition

Trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ constituent une base de l'espace si et seulement si chacun de ces trois vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des deux autres.

Exemple

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ est une base de l'espace car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.



3. Repère de l'espace

Définition

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires. O est un point de l'espace.
On appelle repère de l'espace le quadruplet $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

Remarques

- O est appelé l'origine du repère.
- La décomposition $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $(x;y;z)$ du point M.
- De même, la décomposition $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du vecteur $\vec{u}$.
- Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, si $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$. Alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

Application 2

Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(2;-1;4)$, $B(6;-7;0)$, $C(1;0;1)$ et $D(13;-16;5)$.
Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
(Aide : Exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonctions des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$).