07 : Primitives et équations différentielles

I. Primitive d'une fonction continue

1. Définition d'une équation différentielle

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemples

- Résoudre l'équation $y'=3$ c'est déterminer toutes les fonctions qui vérifient $f'(x)=3$.
  Une solution de cette équation est $f(x)=3x$.
- Une solution de l'équation $y'=2x$ est $y=x^2$.
  Pour une équation différentielle, la solution n'est habituellement pas unique.
  Par exemple, $y=x^2+1$ est une autre solution de l'équation différentielle.

2. Équation différentielle du type $y'=f$

Définition

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I* de $\mathbb{R}$.
On dit que la fonction *g* est une solution de l'équation différentielle $y'=f$ sur *I* si et seulement si, *g* est dérivable sur *I* et, pour tout réel *x* de *I*, on a : $g'(x)=f(x)$.

Application 1

1. Prouver que la fonction *g* définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=5x^2-\ln x$ est solution de l'équation différentielle $y'=\dfrac{10x^2-1}{x}$.

2. Prouver que la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=xe^{-x}$ est solution de l'équation différentielle $y'=\dfrac{1-x}{e^x}$.

3. Primitive d'une fonction

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle *I*.
On appelle primitive de *f* sur *I*, une fonction *F* dérivable sur *I* telle que $F'(x)=f(x)$.

Exemples

$F(x)=x^3-2x^2+5$ est une primitive de $f(x)=3x^2-4x$.
En effet on constate que $F'(x)=3x^2-4x=f(x)$.

Remarque

- Une primitive *F* de *f* est une solution de l'équation $y'=f$.
- *F* a pour dérivée *f* $\Leftrightarrow$ *f* a pour primitive *F*.

Application 2

Montrer que $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de $f(x)=\ln x$.

4. Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x)=a$	$F(x)=ax$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{Z}$ et $n\neq -1$	$F(x)=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n\geq 0$ $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ si $n<-1$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$F(x)=-\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$	$\mathbb{R}$

5. Linéarité des primitives

Propriété

f et *g* sont deux fonctions continues sur un intervalle *I*.
Si *F* est une primitive de *f* et *G* est une primitive de *g* sur *I* alors :

- $F+G$ est une primitive de $f+g$.
- kF est une primitive de kf avec *k* réel.

<u>Application 3</u>

Déterminer une primitive de $f\left(x\right)=x^3-5x^2+3-\dfrac{2}{x}$.

6. <u>Opérations des fonctions composées</u>

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Primitive	Conditions
$u'u^n \quad n\in\mathbb{Z}$ et $n\neq -1$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	Si $n<0$, $u\left(x\right)\neq 0$.
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u\left(x\right)>0$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u\left(x\right)>0$
$u'e^u$	e^u	
$u'\cos u$	$\sin u$	
$u'\sin u$	$-\cos u$	

<u>Exercice 1</u>

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f :

1. $f\left(x\right)=x^3-2x+3$

2. $f\left(x\right)=xe^{x^2}$

3. $f\left(x\right)=3x^2-\dfrac{3}{x^3}$

4. $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

5. $f\left(x\right)=\cos\left(2x\right)-3\sin\left(3x-1\right)$

6. $f\left(x\right)=\dfrac{3x}{x^2+2}$

<u>Propriété 1</u>

Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration au programme

Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I.
Alors : $F'(x)=f(x)$ et $G'(x)=f(x)$.
Donc $F'(x)=G'(x)$, soit $F'(x)-G'(x)=0$, soit encore $(F-G)'(x)=0$.
La fonction $F-G$ possède une dérivée nulle sur I, elle est donc constante sur I.
On nomme C cette constante. Ainsi : $F(x)-G(x)=C$ pour tout x de I.
On en déduit que les deux primitives de f diffèrent d'une constante.

Propriété 2

f est une fonction continue sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel x, la fonction $x \mapsto F(x)+c$ est une primitive de f sur I.

Démonstration

F est une primitive de f.
On pose $G(x)=F(x)+c$.
$G'(x)=F'(x)+0=f(x)$.
Donc G est une primitive de f.

Application 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

1. Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x)=\dfrac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f.

2. Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule en 1.

Propriété 3

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque

Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue.
Par exemple, la fonction $f(x)=e^{x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

II. Équations différentielles

1. Équations différentielles du type $y' = ay$

Propriété 1

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration au programme

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.
  Alors, $f'(x) = C \times ae^{ax} = a \times Ce^{ax} = af(x)$.
  Donc $f'(x) = af(x)$.
  f est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

- Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
  Et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.
  g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = e^{-ax} \times f'(x) - ae^{-ax} \times f(x)$.
  Comme f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, on a : $f'(x) = af(x)$.
  Ainsi : $g'(x) = e^{-ax} \times af(x) - ae^{-ax} \times f(x) = 0$.
  La fonction g est donc égale à une constante réelle C, soit : $e^{-ax} \times f(x) = C$.
  Et donc $f(x) = Ce^{ax}$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $4y' + 3y = 0$.
1. Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.

2. Déterminer l'unique solution telle que $f(-1) = 2$.

Propriété 2

Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et kf, $k \in \mathbb{R}$, sont également solutions de l'équation différentielle.

Démonstration

- $(f+g)' = f' + g' = af + ag = a(f+g)$
- $(kf)' = kf' = kaf = a(kf)$

2. Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriété 1

La fonction $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$).
Cette solution est appelée solution particulière constante.

Démonstration

On pose : $g(x) = -\frac{b}{a}$. On a $g'(x) = 0$.
Or : $ag(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = g'(x)$
Donc g est bien solution de l'équation $y' = ay + b$

Propriété 2

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b deux réels, a non nul) sont les fonctions de la forme $x \mapsto f(x) + g(x)$ où f est une solution quelconque de l'équation $y' = ay$ et g la solution particulière constante de l'équation $y' = ay + b$.

Remarque

L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Corollaire

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle $(E) : 3y' - y = 4$.

1. Déterminer une solution particulière constante de (E).

2. Déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{3}y$.

3. En déduire la forme générale des solutions de (E).

4. Déterminer la solution de (E) telle que $y(0) = -1$

Exercice 4

On consière l'équation différentielle $(E) : 2y' + 3y = 6x + 1$.

1. Déterminer une fonction affine *g*, solution particulière constante de (E).

2. Déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{3}{2}y$.

3. En déduire la forme générale des solutions de (E).