05 : Logarithme népérien

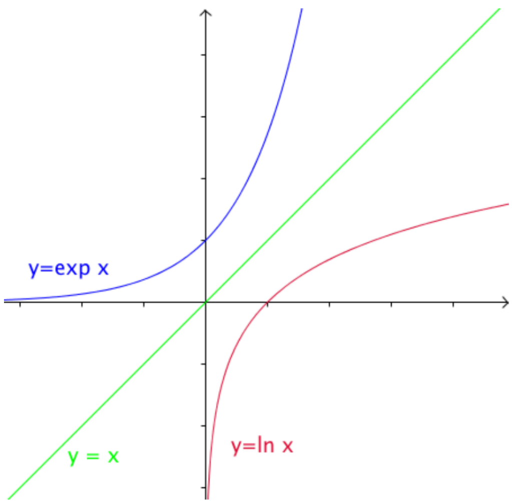
I. Propriétés de la fonction logarithme népérien

1. Fonction réciproque de la fonction exponentielle

- Pour tout nombre réel strictement positif *a*, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution réelle appelée logarithme népérien de *a*, notée $\ln(a)$.
- La fonction qui à tout nombre réel *x* strictement positif associe $\ln(x)$ est appelée fonction logarithme népérien. On note $\begin{array}{l} \ln :]0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{array}$.

Remarque

- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0;+\infty[$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution réelle.
- La fonction logarithme népérien et la fonction exponentielle sont des fonctions réciproques donc leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.



On a ainsi la propriété suivante :

Propriétés

- Pour tout réel $x > 0$ et tout nombre réel *y*, on a : $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$.
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$
- Pour tout réel *x* : $\ln(e^x) = x$
- Pour tout réel $x > 0$: $e^{\ln(x)} = x$

Application 1

1. Simplifier : **a.** $\ln\left(e^{\sqrt{5}}\right)=\ldots$ **b.** $e^{\ln\left(-\frac{2}{3}\right)}=\ldots$

2. Résoudre les équations : **a.** $\ln\left(x\right)=-1$ **b.** $e^{x}=7$

2. Relation fonctionnelle

Pour tout nombre réels x et y strictement positif, on a :

$$\ln\left(x\times y\right)=\ln\left(x\right)+\ln\left(y\right)$$

Démonstration

$e^{\ln(x\times y)}=x\times y=e^{\ln(x)}\times e^{\ln(y)}=e^{\ln(x)+\ln(y)}$ donc $\ln\left(x\times y\right)=\ln\left(x\right)+\ln\left(y\right)$.

Propriétés

Pour tout nombre réels x et y strictement positif, et pour tout nombre entier n on a :

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln\left(x\right)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln\left(x\right)-\ln\left(y\right)$
- $\ln\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(x\right)$
- $\ln\left(x^{n}\right)=n\ln\left(x\right)$

Démonstration

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ln\left(x\right)=\ln\left(\frac{1}{x}\times x\right)=\ln\left(1\right)=0$ donc $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln\left(x\right)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln\left(x\right)+\ln\left(\frac{1}{y}\right)=\ln\left(x\right)-\ln\left(y\right)$
- $\ln\left(x\right)=\ln\left(\sqrt{x}\times\sqrt{x}\right)=\ln\left(\sqrt{x}\right)+\ln\left(\sqrt{x}\right)=2\ln\left(\sqrt{x}\right)$ donc $\ln\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(x\right)$
- On démontre la dernière propriété par récurrence.
  Pour $n=0$, $\ln\left(x^{0}\right)=\ln\left(1\right)=0=0\times\ln\left(x\right)$
  Supposons qu'il existe un entier n tel que : $\ln\left(x^{n}\right)=n\ln\left(x\right)$
  Montrons que $\ln\left(x^{n+1}\right)=\left(n+1\right)\ln\left(x\right)$

On a : $\ln\left(x^{n+1}\right)=\ln\left(x^n\times x\right)=\ln\left(x^n\right)+\ln\left(x\right)=n\ln\left(x\right)+\ln\left(x\right)=\left(n+1\right)\ln\left(x\right)$. Donc vraie pour tout entier *n*.

Exercice 1

1. Écrire les réels suivants à l'aide de $\ln 2$ et de $\ln 3$: $A=\ln 144$ $\quad B=\ln 81+\ln\left(3\sqrt{3}\right)$

2. Simplifier les expressions suivantes :

$C=\ln\left[\left(\sqrt{3}+1\right)^{18}\right]+\ln\left[\left(\sqrt{3}-1\right)^{18}\right]$ $\qquad D=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

II. Fonction logarithme népérien

1. Dérivée et variations

- La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et a pour dérivée la fonction inverse : $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$.
- La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$.

Démonstration

On a $\left(e^u\right)'=u'e^u$ $\qquad$ En posant $u=\ln x$, on a : $\left(e^{\ln x}\right)'=\left(\ln x\right)'e^{\ln x}=1$

Donc $\left(\ln x\right)'\times x=1$ $\qquad$ Ainsi $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$

Comme $x>0$, alors $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}>0$ donc ln est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$.

Application 2

Déterminer la dérivée de $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$.

2. Équations et inéquations

Propriétés

Pour tous réels *a* et *b* strictement positifs on a :

$\ln a=\ln b\Leftrightarrow a=b$ $\qquad$ et $\qquad$ $\ln a<\ln b\Leftrightarrow a<b$

En particulier : $\ln a=0\Leftrightarrow a=1$ $\qquad \ln a<0\Leftrightarrow 0<a<1$ $\qquad \ln a>0\Leftrightarrow a>1$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\ln(x+4) \geq 2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$.

3. Limites

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Conséquence

La courbe représentant la fonction ln admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

4. Convexité

La fonction logarithme népérien est concave sur $]0;+\infty[$.

Démonstration

$f(x) = \ln x$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ donc ln est concave sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$(\ln)'(x)$	‖		$+$		
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \ln x$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Asymptote ?

2. Construire le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.

III. Limites par croissances comparées

Théorème

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ et pour tout entier non nul *n*, on a $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = 0$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et pour tout entier non nul *n*, on a $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

Démonstration du 1

Posons $X = \ln x$. Ainsi $e^X = x$, et donc $x\ln x = e^X \times X = Xe^X$.

De plus $\lim\limits_{x\to 0} X = \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{X\to -\infty} Xe^X = 0$

Remarque

En cas de forme indéterminée, les puissances de *x* l'emportent sur la fonction ln.

Application 3

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x - \ln x\right)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x-1}$ (diviser par *x*)

Exercice 4

Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f\left(x\right) = 3 - x + 2\ln x$.

1. Déterminer les limites de *f*.

2. Calculer $f'\left(x\right)$ étudier son signe.

3. Construire le tableau de variation de *f*.

4. Étudier la convexité de *f*.

Exercice 5

Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f\left(x\right) = \ln x - x + 1$.

1. Calculer les limites de *f* en 0 et en $+\infty$. Interpréter ces résultats.

2. Calculer $f'\left(x\right)$, étudier son signe et donner le tableau de variations de la fonction *f*.

3. En déduire le signe de $f\left(x\right)$.

4. Déterminer une équation de la droite *T*, tangente à la courbe représentative de la fonction ln au point d'abscisse 1.

5. Quelle est la position de la courbe représentative de la fonction ln par rapport à *T* ?