04 : Continuité

I. Notion de continuité

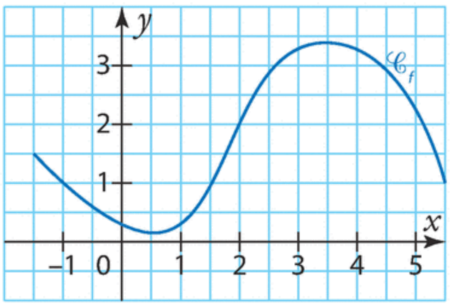
1. Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.

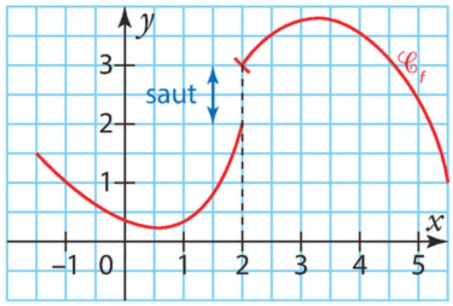
- f est continue en a si : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Remarques

Graphiquement, la continuité d'une fonction sur un intervalle I se traduit par une courbe « en un seul morceau », elle n'a pas de « saut » en certaines valeurs.



Fonction continue
sur son intervalle de définition



La fonction f n'a pas de limite en 2
f est discontinue en 2 donc non continue
sur son intervalle de définition

Exemples

- Les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^n$, ($n \in \mathbb{N}$) et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et elle est continue sur $]0;+\infty[$.

Remarque

Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie.

Théorème

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

Application 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}2x-1 \text{ pour } x\leq 3\\ 8-x \text{ pour } 3<x<7\\ 2x-12 \text{ pour } x\geq 7\end{cases}$.

f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Application 2

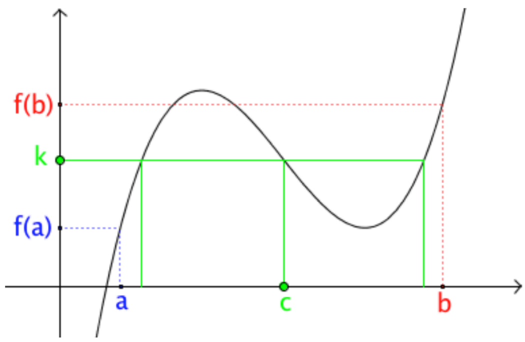
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+5 \text{ si } x<1\\ x-k \quad \text{ si } x\geq 1\end{cases}$.

Pour quelle valeur de k la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

2. Théorème des valeurs intermédiaires

On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a;b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.



Conséquence

- Dans ces conditions, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$.
- Dans le cas où la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a;b]$ alors la solution de l'équation $f(x)=k$ est unique.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+x^2-x+1$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

II. Application à l'étude d'une suite

Théorème (du point fixe)

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) telle que pour tout n, on a : $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers L de I alors L est solution de l'équation $f(x) = x$.

Application 3

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}1$ et $u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$. On admet que la suite (u_n) est croissante et convergente vers L.
Déterminer L.

Exercice 2

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n}$.

1. Écrire une fonction $u(n)$ en Python renvoyant la valeur de u_n puis la convergence de la suite (u_n).

2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 3.

3. Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ puis montrer que f est continue sur $[1;3]$.

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Réponse : Python :

```python
def u(n):
    u=4
    for i in range(n):
        u=9/(6-u)
    return u
```

On peut écrire aussi : for i in range (1 , n + 1)