# 02 : Limites

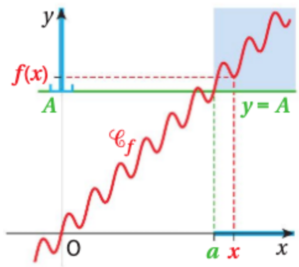
## I. Limites d'une fonction en l'infini

*f* est une fonction définie sur un intervalle de la forme $\left[a;+\infty\right[$ et $L$ est un réel.

### 1. Limite infinie

**Définition**

On dit que la limite de *f* en $+\infty$ est égale à $+\infty$ lorsque tout intervalle $\left]A;+\infty\right[$ contient toutes les valeurs $f\left(x\right)$ dès que $x$ est assez grand.
On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty$.




Quelle que soit la valeur de $A$ choisie, $f\left(x\right)$ dépassera toujours $A$ pour $x$ assez grand.

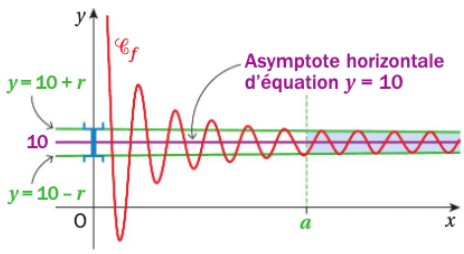
**Remarque**

On définit de manière analogue $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-\infty$.

### 2. Limite finie et asymptote horizontale

**Définition**

- On dit que la limite de *f* a pour limite $L$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant $L$ contient toutes les valeurs $f\left(x\right)$ dès que $x$ est assez grand.
  On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=L$.
- On dit alors que la droite d'équation $y=L$ est asymptote horizontale à $C_f$ en $+\infty$, où $C_f$ est la courbe représentative de la fonction *f*.



**Remarque**

On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

### 3. Limites de fonctions de référence

**Propriété**

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

## II. Limites d'une fonction en un nombre réel

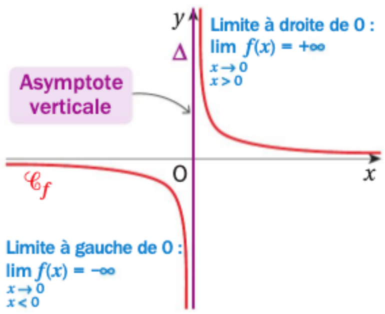
### 1. Limite infinie et asymptote verticale

**Définition**

- On dit que $f$ a pour limite $+\infty$ en $a$ si tout intervalle $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que $x$ est suffisamment proche de $a$.
  On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- On dit alors que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $C_f$.

**Exemple**

Concernant la fonction inverse : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$




Sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées ( $x = 0$ ) comme asymptote verticale.

## III. Opérations sur les limites

$a$ peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

### 1. Limite d'une somme

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $L$ | $L$ | $L$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)$ | $L+L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | FI |

### 2. Limite d'un produit

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $L$ | $L$ | $\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $L'$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$ | $L\times L'$ | $\infty$ | $\infty$ | FI |

On applique la règle des signes pour déterminer le signe du produit.

**Exemple**

$$\lim_{x\to+\infty}(2-x)(x^2+1)=-\infty$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$

### 3. Limite d'un quotient

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $L$ | $L\neq 0$ | $L$ | $\infty$ | $\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $L'\neq 0$ | $0$ | $\infty$ | $L$ | $\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ | $\dfrac{L}{L'}$ | $\infty$ | $0$ | $\infty$ | FI | FI |

On applique la règle des signes pour déterminer le signe du quotient.

**Remarque**

Il y a 4 formes indéterminées qui sont : $\infty-\infty$ $\quad\infty\times 0\quad$ $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\quad\dfrac{0}{0}$

**Exercice 1**

Déterminer les limites suivantes :

**1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x^3-3x^2+2x+1\right)$

**2.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{3x^2+5}$

**3.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+2}{3-\dfrac{1}{x}}$

**4.** $f\left(x\right)=\dfrac{2x-7}{x^2-1}$ limites en 1.

**Exercice 2**

Soit *f* fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{5\right\}$ par $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{5-x}$.

**1.** Déterminer la limite de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter le résultat.
**2.** Déterminer la limite de *f* en 5 à droite et à gauche. Interpréter le résultat.
**3.** Dresser le tableau complet de variation de *f*.

## IV. Limites par comparaison

$a$ et $L$ sont deux réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

### 1. Théorème de comparaison

Soit *f* et *g* deux fonctions telles que, pour *x* proche de *a*, on a $g\left(x\right)\leq f\left(x\right)$.

- Si $\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=-\infty$.

**Exercice 3**

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f\left(x\right)\leq x^3-\dfrac{1}{x}$.

**1.** Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)$.

**2.** Peut-on déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$ ?

### 2. Théorème d'encadrement

Soit *f*, *g* et *h* trois fonctions telles que, pour *x* proche de *a*, on a $g\left(x\right)\leq f\left(x\right)\leq h\left(x\right)$.
Si $\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a}h\left(x\right)=L$, alors $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=L$.

**Exemple**

$f$ est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

On a $-1\leq \sin x\leq 1$ et comme $x>0$, alors $\dfrac{-1}{x}\leq \dfrac{\sin x}{x}\leq \dfrac{1}{x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

**Exercice 4**

**1.** Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction $f(x)=x+\cos x$.

**2.** Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $g(x)=\cos x.e^{-x}$.

**3.** Déterminer les limites en $-\infty$ de la fonction $h(x)=\dfrac{2x^2+\sin x}{x-1}$.

## 3. Fonction exponentielle et croissance comparée

**Propriété 1**

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

**Démonstration**

Posons $f(x)=e^x-x$.

$f'(x)=e^x-1$

Posons $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^x-1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq 1\Leftrightarrow x\geq 0$

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | − | 0 | + | |
| f | | $\searrow$ | 1 | $\nearrow$ | |

Donc $f(x)\geq 1>0$ cad $e^x>x$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

On a montré que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

Posons $X = -x$, on a :

$\lim_{x \to +\infty} X = \lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$ et $e^{-x} = e^X$, donc en changeant la variable on a $\lim_{X \to -\infty} e^X = 0$

**<u>Propriété 2</u>**

Pour tout entier naturel *n*, on a : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

**<u>Démonstration</u>**

- Pour $n = 1$ : Montrons que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Posons $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

On a : $f'(x) = e^x - x$ et $f''(x) = e^x - 1$.

Pour tout *x* strictement positif, $f''(x) = e^x - 1 \geq 0$.

On dresse alors le tableau de variations :

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $1$ $\nearrow$ |
| Signe de $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $1$ $\nearrow$ |

On en déduit que pour tout *x* strictement positif $f(x) > 0$ et donc $e^x > \frac{x^2}{2}$.

Et donc $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, on en déduit par comparaison de limites que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- Plus généralement :

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n.$$

Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ car on a vu que $\lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$. Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$, car $n > 0$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \right)^n = +\infty$ d'où le résultat.

**Remarque**

En cas de forme indéterminée, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de $x$.

**Exercice 5**

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}$