01 : Suites numériques

Exercice 1

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel *n* par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3$.

1. a. À l'aide de la calculatrice, calculer les 10 premiers termes de la suite.

b. Conjecturer le sens de variation et une majoration de (u_n).

2. Montrer par récurrence que (u_n) est majorée par 9.

3. Montrer que $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + 3$, puis en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4. Justifier que la suite (u_n) converge.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel *n* par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel *n*, $u_n \geq 0$.

2. On définit maintenant la suite auxiliaire (t_n) définie pour tout entier naturel *n* par

$$t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}.$$

a. Montrer que la suite (t_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b. Expliciter t_n en fonction de *n* pour tout entier naturel *n*.

3. En déduire l'expression explicite de u_n fonction de *n* pour tout entier naturel *n*.

4. En déduire la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

03 : Asie – Juin 19

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.
Une tasse de café est servie à une température initiale de 80° dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est égale à 10°.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant un modèle d'évolution utilisant une suite.
Pour tout entier naturel *n*, on note T_n la température du café à l'instant *n*, avec T_n exprimé en degré Celsius et *n* en minute.
On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques *n* et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = -0,2\left(T_n - 10\right)$$

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite $\left(T_n\right)$?

2. Montrer que pour tout entier naturel *n*, $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.

3. a. Écrire une fonction Python retournant la liste des 10 premiers termes de $\left(T_n\right)$.

b. Cette liste est-elle cohérente avec la conjecture émise à la question 1 ?

4. On pose, pour tout entier naturel *n*, $u_n = T_n - 10$.
a. Montrer que $\left(u_n\right)$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.

b. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.
Déterminer la limite de la suite $\left(T_n\right)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

04 : Extrait de Pondichéry – Avril 17

On considère deux suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ telles que :
* la suite $\left(u_n\right)$ est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel *n* : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$.
* la suite $\left(v_n\right)$ est définie, pour tout entier naturel *n*, par : $v_n = 2^n$

1. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2. Déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)$.
3. Expliquer pourquoi le programme Python ci-dessous se termine et ce que renvoie l'appel $\text{algo}(6)$.

```
def algo(p):
    u=1
    n=0
    while u<=10**p:
        u=2*u-n+3
        n=n+1
    return n
```

4. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, $0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$.

05 : Extrait de Métropole – Juin 19

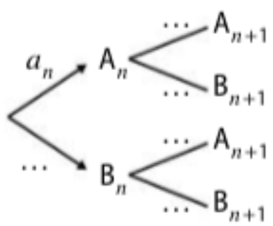
Stream est une plateforme informatique qui propose deux types de Jeux vidéo : un jeu de type A et un Jeu de type B. Dès que le joueur achève une partie, Stream lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

* s'il vient de terminer une partie de type A, elle lui propose une nouvelle partie de type A avec une probabilité de 0,8 ;
* s'il vient de terminer une partie de type B, elle lui propose une nouvelle partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les événements « la n-ième partie est de type A » et « la n-ième partie est de type B ».

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on appelle a_n la probabilité de l'événement A_n et b_n la probabilité de l'événement B_n.

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

On note a la probabilité que le joueur choisisse une partie de type A lors de la première partie, où a est un réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

La suite (a_n) est donc définie par $a_1 = a$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3.$$

2. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = a_n - 0,6$ est géométrique.

3. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$.

4. Déterminer la limite de la suite (a_n). Cette limite dépend-elle de la valeur de a ?

06 : Amérique du nord – Juin 17

Le but de ce problème est d'étudier les suites à termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel n strictement positif, la somme des *n* premiers termes consécutifs est égale au produit des *n* premiers termes consécutifs. On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n).

Elle vérifie donc les propriétés suivantes :

* $u_0 > 1$; * pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$

* pour tout $n \geq 0$, $u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1}$

1. On choisit $u_0 = 3$. Calculer u_1 et u_2.

2. Pour tout entier $n > 0$, on note : $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1}$,

On a en particulier $s_1 = u_0$.

a. Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

b. En déduire que pour tout entier $n > 0$, $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$.

c. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $u_n > 1$.

3. La fonction Python ci-dessous doit retourner le terme u_n pour une valeur de *n* donnée.

a. Compléter le programme.

```
def algo(n,u):
    u=3
    s=u
    for i in range( … ):
        u= …
        s= …
    return (u)
```

b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier *n*.

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

4. a. Justifier que pour tout entier *n* strictement positif $s_n > n$.

b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

07 : Antilles Guyanes – Sept 19

Indiquer si les affirmations sont vraies, ou fausses, puis justifier.

1. On considère une suite (u_n) convergente.

Affirmation 1 : La suite (u_n) est croissante et majorée ou la suite (u_n) est décroissante et minorée.

2. On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel *n*, par $p_n = n^2 - 42n + 4$.

Affirmation 2 : La suite (p_n) est strictement décroissante.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel *n* par $u_n = 0,8^n$.

Affirmation 3 : Pour obtenir le premier entier n_0 tel que $0,8^n < 0,01$ on complète la ligne 3 du programme ci-dessous par $0,8**n \geq 0,01$.

```
1 def seuil():
2     n=0
3     while...:
4         n=n+1
5     return(n)
```

4. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel *n* :

$n^2 \leq (n+1)^2 w_n \leq n^2 + n$

Affirmation 4 : La suite (w_n) converge.

5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel *n* par $u_n = \dfrac{1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+n^2}$.

Affirmation 5 : La suite (u_n) n'a pas de limite.

08 : Nouvelle Calédonie – Mars 19

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel *n*,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}.$$

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,111 111 11
4	2	0,013 698 63
5	3	0,001 709 4
6	4	0,000 213 63
7	5	2,670 3E−05
8	6	3,337 9E−06
9	7	4,172 3E−07
10	8	5,215 4E−08
11	9	6,519 3E−09
12	10	8,149 1E−10

1. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) ?

2. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?

3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?

4. Écrire un algorithme calculant u_{30}.

Partie B : Étude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $u_n > 0$.

2. Étudier les variations de la suite (u_n).

3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel *n*, $v_n = 1 + \frac{7}{u_n}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.

2. Justifier que, pour tout entier naturel *n*, $u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à n_0, $u_n < 10^{-18}$.
Justifier l'existence d'un tel entier n_0 et déterminer sa valeur.

09 : Antilles Guyanes – Juin 18

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2000.
Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

* entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
* entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.

3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > 1520$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2000.

```
def seuil()
n=0
u=3000
while ...
n=...
u=...
return(n)
```

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.