Exercices sur la récurrence

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par : $u_2 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{3\,u_n + 1}{u_n + 3}$ pour tout $n \geqslant 2$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a $u_n = \dfrac{2^n + 2}{2^n - 2}$

Exercice 2

On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = \dfrac{7}{8}$ et pour tout $n \geqslant 0$ $v_{n+1} = v_n^2$

Démontrer par récurrence que $v_n = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$.

Exercice 3

Pour tout $n \geqslant 1$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$

Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $S_n = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

Exercice 4

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geqslant n$.

Exercice 5

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \dfrac{2}{3}$ et pour tout entier n $u_{n+1} = u_n\,(2 - u_n)$.

On considère la fonction $f : x \longmapsto x(2-x)$.

On admet que cette fonction f est croissante sur $[0\,;\,1]$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par : $\quad f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\quad v_0 = 2 \quad$ et $\quad v_{n+1} = f(v_n) \quad$ pour tout entier naturel n

On admet les propriétés suivantes :
- f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2]$
- Si $x \in [1\;;\;2]$ alors $f(x) \in [1\;;\;2]$.

Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

1. Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.

2. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$.

Correction des exercices

Exercice 1 - Correction

• **Inititialisation** (pour $n = 2$)

D'une part on a : $u_2 = 3$,

d'autre part pour $n = 2$ on a : $\dfrac{2^n + 2}{2^n - 2} = \dfrac{2^2 + 2}{2^2 - 2} = \dfrac{6}{2} = 3$

donc $\mathcal{P}(2)$ est vrai

• **Hérédité**

Soit un entier $n \geqslant 2$,

on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai c'est-à-dire $u_n = \dfrac{2^n + 2}{2^n - 2}$,

on va montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai c'est-à-dire $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1} + 2}{2^{n+1} - 2}$

On a :

$$u_{n+1} = \frac{3\,u_n + 1}{u_n + 3} = \frac{3\left(\dfrac{2^n + 2}{2^n - 2}\right) + 1}{\dfrac{2^n + 2}{2^n - 2} + 3}$$

$$= \frac{\dfrac{3(2^n + 2) + 2^n - 2}{2^n - 2}}{\dfrac{2^n + 2 + 3(2^n - 2)}{2^n - 2}} = \frac{3(2^n + 2) + 2^n - 2}{2^n + 2 + 3(2^n - 2)} = \frac{3 \times 2^n + 6 + 2^n - 2}{2^n + 2 + 3 \times 2^n - 6}$$

$$= \frac{2^n(3+1) + 4}{2^n(1+3) - 4} = \frac{2^n \times 4 + 4}{2^n \times 4 - 4} = \frac{\cancel{2}(2^n \times 2 + 2)}{\cancel{2}(2^n \times 2 - 2)}$$

$$= \frac{2^{n+1} + 2}{2^{n+1} - 2}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai et

donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

• **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 2 - Correction

• **Inititialisation** (pour $n = 0$)

D'une part on a : $v_0 = \dfrac{7}{8}$,

d'autre part pour $n = 0$ on a : $\left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^0} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{1} = \dfrac{7}{8}$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai.

• **Hérédité**

Soit un entier $n \geqslant 0$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai c'est-à-dire $v_n = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$

on va montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai c'est-à-dire $v_{n+1} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$

On a : $v_{n+1} = v_n^2 = \left[\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right]^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n \times 2} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai et donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

- **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 3 - Correction

- **Inititialisation** (pour $n = 1$)

D'une part $S_1 = 1^2 = 1$,

d'autre part $\frac{1(2\times 1 - 1)(2 \times 1 + 1)}{3} = \frac{1 \times 3}{3} = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vrai

- **Hérédité**

Soit un entier $n \geqslant 1$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai c'est-à-dire $S_n = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$,

on va montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai c'est-à-dire $S_{n+1} = \frac{(n+1)\left[2(n+1)-1\right]\left[2(n+1)+1\right]}{3}$

ou $S_{n+1} = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$

Méthode :

Pour pouvoir utiliser l'égalité supposée vraie pour S_n, il faut trouver une relation entre S_{n+1} et S_n.

La relation est : $S_{n+1} = S_n + (2n+1)^2$.

En effet : $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 = S_n + (2n+1)^2$

$$
\begin{aligned}
\text{On a : } S_{n+1} &= S_n + (2n+1)^2 \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + \frac{3(2n+1)^2}{3} \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1) + 3(2n+1)(2n+1)}{3} \\
&= \frac{(2n+1)\left[n(2n-1) + 3(2n+1)\right]}{3} \\
&= \frac{(2n+1)(2n^2 - n + 6n + 3)}{3} \\
&= \frac{(2n+1)(2n^2 + 5n + 3)}{3} \\
&= \frac{(2n+1)(2n+3)(n+1)}{3}
\end{aligned}
$$

Remarque : un calcul rapide permet de vérifier que l'on a bien : $2n^2 + 5n + 3 = (2n+3)(n+1)$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai et donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

- **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 4 - Correction

• **Inititialisation** (pour $n = 0$)

On a : $u_0 = 0$ donc $u_0 \geqslant 0$.

et donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai

• **Hérédité**

Soit un entier $n \geqslant 0$,

on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai c'est-à-dire $u_n \geqslant n$,

on va montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant n+1$

On a :

$u_n \geqslant n$

$3u_n \geqslant 3n$ Multiplication par un nombre positif, le sens de l'inégalité ne change pas

$3u_n - 2n \geqslant n$

$3u_n - 2n + 3 \geqslant n + 3$

or $n + 3 \geqslant n + 1$

donc $3u_n - 2n + 3 \geqslant n + 1$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai et donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

• **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 5 - Correction

• **Inititialisation** (pour $n = 0$)

On a $u_0 = \dfrac{2}{3}$ donc $0 < u_0 < 1$:

donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai

• **Hérédité**

Soit un entier $n \geqslant 0$,

on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai c'est-à-dire $0 < u_n < 1$,

on va montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai c'est-à-dire $0 < u_{n+1} < 1$.

On a : $0 < u_n < 1$

La fonction f est croissante sur $[0\,;\,1]$, donc : $f(0) < f(u_n) < f(1)$

soit $0 < u_{n+1} < 1$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai et donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

- **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 6 - Correction

1.

- **Inititialisation** (pour $n = 0$)

On a : $v_0 = 2$ donc $1 \leqslant v_0 \leqslant 2$

et donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai

- **Hérédité**

Soit un entier $n \geqslant 0$,

on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai c'est-à-dire $1 \leqslant v_n \leqslant 2$,

on va montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai c'est-à-dire $1 \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$.

On a : $1 \leqslant v_n \leqslant 2$

La fonction f est croissante sur $[0\,;\,2]$, donc : $f(1) \leqslant f(v_n) \leqslant f(2)$

soit $\dfrac{3}{2} \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{5}{3}$. or $1 \leqslant \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{5}{3} \leqslant 2$ $\left(\text{Remarque : } 2 = \dfrac{6}{3}\right)$

donc $1 \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai et donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

- **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 6 - Correction

2.

• **Inititialisation** (pour $n = 0$)

On a : $v_1 = f(v_0) = f(2) = \frac{5}{3}$

et $v_0 = 2$ donc $v_1 \leqslant v_0$.

Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

• **Hérédité**

Soit un entier $n \geqslant 0$, on suppose que $\mathcal{Q}(n)$ est vrai c'est-à-dire $v_{n+1} \leqslant v_n$,

on va montrer que $\mathcal{Q}(n+1)$ est vrai c'est-à-dire $v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$.

On a :

$v_{n+1} \leqslant v_n$.

$v_n \in [1\,;\,2]$ d'après la question 1.

$v_{n+1} \in [1\,;\,2]$ car $v_{n+1} = f(v_n)$ avec $v_n \in [1\,;\,2]$. (voir propriété de f).

f est croissante sur $[0\,;\,2]$, donc :

$f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n)$

soit $v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$

Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vrai et donc $\mathcal{Q}(n)$ est héréditaire.

• **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence $\mathcal{Q}(n)$ est vrai pour tout $n \geqslant 0$.