# 01 : Les suites numériques

## I. Le raisonnement par récurrence

### 1. Présentation

Soit $P(n)$ la propriété : « $7^n + 2$ est divisible par 3 ».

On veut vérifier que cette propriété est vraie pour tout entier naturel $n$.
Pour cela, il faudrait procéder à une infinité de vérifications (pour tous les entiers naturels, ce qui est, évidemment impossible).
Grâce au raisonnement par récurrence, il est possible de conclure en trois étapes.

### 2. Axiome de récurrence

Pour démontrer que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à $n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie, on procède en deux étapes :

- **Initialisation** : On vérifie que la propriété est vraie pour $n_0$, c'est-à-dire que $P(n_0)$ est vraie (en général $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$) ;
- **Hérédité** : On suppose qu'il existe un entier $n$ tel que $P(n)$ soit vraie, et on démontre qu'alors $P(n+1)$ elle est vraie.

On peut alors conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

**Application**

Montrer par récurrence que $7^n + 2$ est divisible par 3.

**Exercice 1**

Démontrer par récurrence que :

- $4^n - 1$ est multiple de 3.
- $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- $2^n \geq n+1$.
- $(1+x)^n \geq 1+xn$, avec $x$ un réel positif (inégalité de Bernoulli).

**Exercice 2**

$u$ est la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout nombre entier naturel $n$ : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

**1.** Démontrer par récurrence que tout entier naturel $n$, $u_n \geq 2$.

**2.** Démontrer par récurrence de la suite $u$ est décroissante.

**3.** Conclure.

**Exercice 3**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$.

Démontrer par récurrence que : $u_n = (n+1)^2$.

## II. Limite finie ou infinie d'une suite

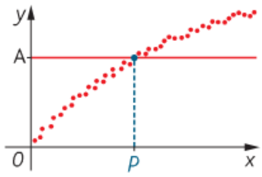
### 1. Limite infinie d'une suite

**Définition**

Soit $A \in \mathbb{R}$.

La suite $(u_n)$ admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ ( $]-\infty; A[$ ) contient toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang.

On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).




### 2. Algorithme de seuil

Soit $(u_n)$ une suite qui tend vers $+\infty$.

Le but de l'algorithme est de déterminer le rang à partir duquel $u_n$ soit supérieur à $A$.

**Exemple**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n$, $u_{n+1} = 4u_n$.

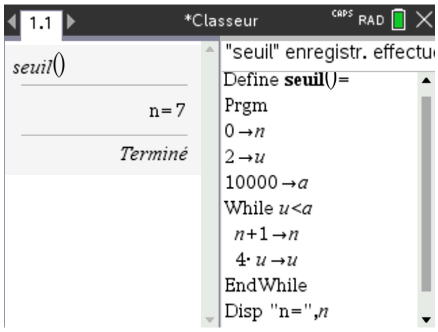
Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$.

Algorithme de seuil en langage naturel :

Pour $A = 10000$, on obtient $n = 7$.

| Langage naturel |
|---|
| Définir fonction seuil(A)<br><br>n ← 0<br>u ← 2<br><br>Tant que u < A<br>    n ← n + 1<br>    u ← 4u<br>Fin Tant que<br><br>Afficher n |

Avec la TI Nspire CX CAS :




Avec Python :

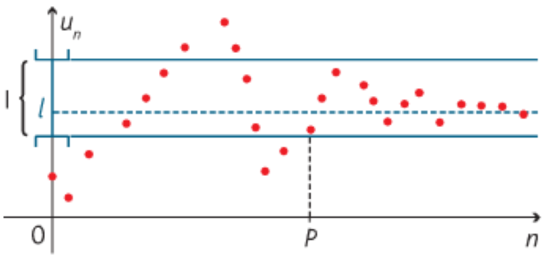
```
Python
def seuil(a):
    n=0
    u=2
    while u<a:
        n=n+1
        u=4*u
    return(n)
```

## 3. Limite finie d'une suite

### Définition

La suite $(u_n)$ admet pour limite le réel $l$ si, tout intervalle ouvert contenant $l$ contient toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang.

On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.




On dit que la suite $(u_n)$ converge vers $l$.

### Remarque

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

## 4. Limites de suites usuelles

### Propriétés

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

## III. Opérations sur les limites

Soit deux suites de nombres réels $(u_n)$ et $(v_n)$ admettant une limite finie ou infinie, et soit $l$ et $m$ deux nombres réels.

### 1. Addition : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$

| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ / $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $m$ | $l+m$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | FI |
| $-\infty$ | $-\infty$ | FI | $-\infty$ |

### 2. Produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$

| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ / $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $l,\ l\neq 0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $m, m\neq 0$ | $l\times m$ | $0$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | FI | FI |
| $+\infty$ | $\pm\infty$ | FI | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $\pm\infty$ | FI | $-\infty$ | $+\infty$ |

### 3. Quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$

| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $l,\ l\neq 0$ | $0$ | $\pm\infty$ |
|---|---|---|---|
| $m, m\neq 0$ | $\frac{l}{m}$ | $0$ | $\pm\infty$ |
| $0$ | $\pm\infty$ | FI | $\pm\infty$ |
| $+\infty$ | $0$ | $0$ | FI |

**Remarques**

- Le signe du Résultat s'obtient à l'aide de la règle des signes.
- Il y a 4 formes indéterminées principales : $\infty-\infty$ ; $\infty\times 0$ ; $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$.

**Exercice 4**

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2-n+5$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2+1}$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2+2n-1}{2n^2-n+5}$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n-\sqrt{n}\right)$

## IV. Propriétés sur les limites de suites

### 1. Limites et comparaison

**Théorème**

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites vérifiant les deux conditions :

- à partir d'un certain rang on a $u_n \leq v_n$ ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

**Remarque**

De manière analogue : si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

**Démonstration (type bac)**

Soit $A$ un nombre réel.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors il existe un rang $n_1$ à partir duquel tous les termes $u_n$ appartiennent à l'intervalle $\left]A;+\infty\right[$, cad $A < u_n$.
On sait de plus qu'à partir d'un certain rang $n_2$, on a $u_n \leq v_n$.
A partir du rang $\max(n_1;n_2)$ on a :

$\begin{cases} A < u_n \\ u_n \leq v_n \end{cases}$ ainsi $A < u_n < v_n$, donc $v_n \in \left]A;+\infty\right[$

Finalement, tout intervalle de la forme $\left]A;+\infty\right[$ contient tous les termes $v_n$ à partir certain rang, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

**Application 2**

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \cos n$

**2. Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)**

Soit $l \in \mathbb{R}$ et $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ trois suites vérifiant les deux conditions :

- à partir d'un certain rang on a $u_n \leq v_n \leq w_n$ ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

**Application 3**

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\sin n}{n}$.

**3. Suites majorées, minorées, bornées**

**Définition**

Soit $M$ et $m$ deux nombres réels. On dit que la suite $(u_n)$ est :

- **Majorée** par $M$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$ ;
- **Minorée** par $m$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$ ;
- **Bornée** si $(u_n)$ est à la fois majorée et minorée.

**Application 4**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est majorée par $3$.

## 4. Convergence des suites monotones

**Théorème 1**

Soit $l \in \mathbb{R}$ et $(u_n)$ une suite croissante.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, alors tous les termes de la suite $(u_n)$ sont inférieurs ou égaux à *l*.

**Remarque**

On pourrait dire aussi que la suite $(u_n)$ est majorée par le nombre *l*.

**Théorème 2**

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

**Théorème 3**

- Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée a pour limite $-\infty$.

**Démonstration**

Soit un réel *a*.
Comme $(u_n)$ n'est pas majorée, il existe un entier *p* tel que $u_p > a$.
La suite $(u_n)$ est croissante donc pour tout $n > p$, on a : $u_n > u_p$.
Donc pour tout $n > p$, on a : $u_n > a$.
Et donc à partir d'un certain rang *p*, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]a;+\infty[$.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

**Exercice 4**

$u$ est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

**1.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et en déduire que la suite $u$ est croissante.

**2.** Montrer que si $u$ est majorée, alors elle converge vers un nombre réel négatif.

**3.** Montrer que $u$ n'est pas majorée et déterminer sa limite.

## 5. Limite d'une suite géométrique

**Théorème**

Soit $q \in \mathbb{R}$. On a les résultats suivants :

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$;
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ ;
- Si $q < -1$, alors la suite $\left(q^n\right)$ n'admet pas de limite.

**Démonstration**

Soit $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$. Alors :

$q = 1 + x$, avec $x > 0$.

On sait alors, grâce à l'inégalité de Bernoulli que, pour tout entier $n$ :

Pour tout $x > 0$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Pour $x > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} nx = +\infty$

On a donc :

- à partir du rang 0, $(1+x)^n \geq 1 + nx$ ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+nx) = +\infty$

On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+x)^n = +\infty$ autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

**Exercice 5**

Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + (-1)^n$.

**1.** Conjecturer son comportement à l'infini à l'aide de la calculatrice.

**2.** Démontrer cette conjecture.

**Exercice 6**

Soit $(u_n)$ une suite décroissante et strictement positive.

Montrer que la suite $(v_n)$, définie sur $\mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{1}{1+u_n}$ est convergente.

**Exercice 7**

Étudier limite à l'infini de $3^n - 4^n$.

**Exercice 8**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 75$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 50$.

**1.** Démontrer par récurrence que pour tout entier *n*, on a : $u_n < u_{n+1} \leq 125$.

**2.** En déduire que la suite $(u_n)$ converge.

**3.** Déterminer la limite de $(u_n)$.