Interrogation de mathématiques n°4

Le sujet est composé de deux parties.
La première de 20 min sans calculatrice et la deuxième de 1h15min avec la calculatrice.

Partie 1 – Sans calculatrice : 20 min

Exercice 1 – 5 points

Compléter le tableau suivant :

Fonction	Primitive
$f(x)=3x-5$	$F(x)=$
$f(x)=x^2-x+2$	$F(x)=$
$f(x)=2e^x+\dfrac{1}{x}$	$F(x)=$
$f(x)=xe^{x^2}$	$F(x)=$
$f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$	$F(x)=$
$f(x)=\dfrac{1}{3x+1}$	$F(x)=$
$f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x+x}$	$F(x)=$
$f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x^2}$	$F(x)=$
$f(x)=(2x+1)(x^2+x)^3$	$F(x)=$
$f(x)=(x-2)(x^2-4x)^9$	$F(x)=$

Partie 2 – Avec calculatrice : 1h15min

Exercice 2 – 2 points

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$.

Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 1. Justifier la réponse.

Exercice 3 – 6 points

On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E): y'+2y=3e^{-x}$$

1. Déterminer le réel a tel la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=ae^{-x}$ soit une solution (E).

2. Résoudre l'équation $(E'): y'+2y=0$.

3. Démontrer que « f est solution de (E) » équivaut à « $f-g$ est solution de (E') ».

4. En déduire alors toutes les solutions de (E).

5. Déterminer l'unique solution h de (E) qui prend la valeur 2 en 0.

Exercice 4 – 7 points

Un réservoir contient initialement 100 litres d'eau pure. De l'eau salée, contenant 0,2 kg de sel par litre, est introduite dans le réservoir à un débit de 5 litres par minute.
Simultanément, le mélange (supposé homogène) est évacué du réservoir au même débit de 5 litres par minute.
On note $y(t)$ la quantité de sel (en kg) présente dans le réservoir à l'instant t (en minutes).
On suppose que y vérifie l'équation :

$$(E) : 20y' + y = 20$$

1. Expliquer pourquoi le volume d'eau dans le réservoir reste constant.

2. Déterminer la condition initiale $y(0)$.

3. a. Résoudre l'équation (E).

b. Exprimer la quantité de sel $y(t)$ en fonction du temps t.

4. On suppose, dans la suite de l'exercice, que la quantité de sel dans le réservoir est donné par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 20 - 20e^{-0,05x}$$

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

b. Déterminer les variations de f sur $[0;+\infty[$ et construire son tableau de variation.

c. A partir de quel moment la quantité de sel dépassera 10 kg ? On donnera le résultat arrondi à la minute près.