# Interrogation de mathématiques n°1

## Exercice 1 – 4 points

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$

Montrer par récurrence que $u_n = 2^n - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## Exercice 2 – 3 points

Déterminer la limite des suites suivantes :

$u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{3n^2 + 1}$ $\qquad v_n = 4^n - 5^n$ $\qquad w_n = n - \cos(n)$

## Exercice 3 – 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

**1. Affirmation 1** : Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.

**2.** On considère une suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier *n*, on a $u_n \leq \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n}$.

**Affirmation 2** : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

**3.** On considère la fonction suivante écrite en langage Python :

```python
def terme(N) :
    U =1
    for i in range(N) :
        U=U+i
    return U
```

**Affirmation 3** : terme(4) renvoie la valeur 7.

**4. Affirmation 4** : La suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel *n* par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est bornée.

**5.** Pour tout entier naturel *n* on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 2$.

**Affirmation 5** : $(u_n)$ converge vers un nombre *l* tel que $1 \leq l \leq 2$.

**Exercice 4 – 8 points**

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.
Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.
Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.
On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite $(u_n)$ où $u_n$ représente l'effectif de la population au début de l'année $2020+n$.
On admet que pour tout entier naturel $n$, $u_n \geq 0$.
Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2000$.

**1.** Justifier que la suite $(u_n)$ vérifie la relation de récurrence : $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.

**2.** Calculer $u_1$ puis $u_2$.

**3.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ : $1000 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

**4.** La suite $(u_n)$ est-elle convergente ? Justifier la réponse.

**5.** On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - 1000$.

**a.** Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison 0,9.

**b.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 1000\left(1+0,9^n\right)$.

**c.** Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.
En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

**6.** On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil $S$ (avec $S > 1000$).
**a.** Déterminer le plus petit entier $n$ tel que $u_n \leq 1020$. Justifier la réponse par un calcul.

**b.** Dans le programme Python ci-contre, la variable $n$ désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable $u$ désigne l'effectif de la population.
Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil $S$.

```
def population(S) :
  n=0
  u=2000
  while ......:
    u= ...
    n = ...
  return ...
```