Correction DST 1

exo 1

(I) Pour $n=0$

$u_0 = 0$

$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ Donc vraie pour $n=0$

(H) supposons qu'il existe un entier n tq $u_n = 2^n - 1$

Mq $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

On a $u_n = 2^n - 1$

$2u_n = 2(2^n - 1)$ car $2 > 0$

$2u_n + 1 = 2 \cdot 2^n - 2 + 1$

$u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

(C) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 2^n - 1$

exo 2

1) $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{3n^2 + 1} = \dfrac{n^2\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3 + \frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{2 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}}$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$

2) $v_n = 4^n - 5^n$

$= 5^n \left[\dfrac{4^n}{5^n} - 1 \right]$

$= 5^n \left[\left(\dfrac{4}{5}\right)^n - 1 \right]$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{4}{5} < 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\left(\dfrac{4}{5}\right)^n - 1\right] = -1$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty$ car $5 > 1$

Donc $\lim v_n = -\infty$

3) $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

$-1 \leq -\cos(n) \leq 1$

$n - 1 \leq n - \cos(n) \leq n + 1$

Donc $n - 1 \leq w_n$ comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

exo 3

1 F $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ $(u_n) \searrow$ (u_n) minorée par 0.

mais $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

(2 V) $\lim \dfrac{-9^n+3^n}{7^n} = -\infty$

Donc $\lim u_n = -\infty$.

(3 V)

- $u = 1$
- $u = 1+0$ $\quad n=0$
  $=1$
- $u = 1+1$ $\quad n=1$
  $=2$
- $u = 2+2$ $\quad n=2$
  $=4$
- $u = 4+3$ $\quad n=3$
  $= 7$

(4 V)

$$-1 \leq -\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \leq 1$$

Donc $-1 \leq u_n \leq 1$ $\quad (u_n)$ est bornée

(5 F)

$u_n = 1{,}5 + 0{,}5\cos n$ $\quad) \times 0{,}5$

$-0{,}5 \leq 0{,}5\cos n \leq 0{,}5$ $\quad) + 1{,}5$

$1 \leq 1+0{,}5\cos n \leq 2$

$1 \leq u_n \leq 2$ mais (u_n) n'a pas de limite (comme $\cos n$)

exo 4.

1. Perte de 10% $\rightarrow$ $u_n \times \left(1-\frac{10}{100}\right) = 0{,}9\, u_n$.

   Gain de 100 individus $\rightarrow$ $0{,}9\, u_n + 100$

   Donc $u_{n+1} = 0{,}9\, u_n + 100$.

2. $u_1 = 1900$

   $u_2 = 1810$

3. (I) pour $n=0$ $\quad 1000 \leq u_2 \leq u_1$ Donc vraie

   (H) sup $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $1000 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

   Mq $1000 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

   On a $1000 \leq u_{n+1} \leq u_n$

   $0{,}9 \times 1000 + 100 \leq 0{,}9\, u_{n+1} + 100 \leq 0{,}9\, u_n + 100$ $\quad$ car $0{,}9 > 0$

   $1000 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

   (HC) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1000 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

4. $(u_n) \searrow$ car $u_{n+1} \leq u_n$

   (u_n) est minorée car $1000 \leq u_n$

   Donc (u_n) converge.

5a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$

$= 0,9u_n + 100 - 1000$

$= 0,9u_n - 900$

$= 0,9\left(u_n - \frac{900}{0,9}\right)$

$= 0,9(u_n - 1000)$

$= 0,9 v_n$

Donc (v_n) SG de raison $q = 0,9$

b. $v_0 = u_0 - 1000$

$= 2000 - 1000$

$= 1000$

Donc $v_n = v_0 \times q^n$

$= 1000 \times 0,9^n$

Comme $v_n = u_n - 1000$

alors $u_n = v_n + 1000$

$u_n = 1000 \times 0,9^n + 1000$

$= 1000(0,9^n + 1)$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ car $-1 < 0,9 < 1$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1000(0+1)$

$= 1000$

le nombre d'individus se rapprochera de 1000 après un grand nombre d'années

6. a. A la TI on a : $u_{37} = 1020,28 > 1020$

$u_{38} = 1018,25 < 1020$

Donc $u_n \leq 1020$ à partir de $n = 38$.

b.

```
Def population(S)
  n=0
  u=2000
  while u>S
    u=0,9u+100
    n=n+1
  return(n)
```