Interrogation de mathématique n°7

Exercice 1 *7 points*

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

Pour tout entier naturel n, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

1. Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$.

2.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.

b. En déduire la valeur exacte de u_1.

3. À l'aide d'un algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ? (variations et limite)

4.

a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5. On appelle l la limite de la suite (u_n). Démontrer que $l = 0$.

Exercice 2 *3 points*

A l'aide d'une intégration par partie montrer que :

$$\int_1^e x^2 \ln(x)\,dx = \frac{2e^3+1}{9}$$

Exercice 3 *5 points*

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine *n* le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine *n* le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ».

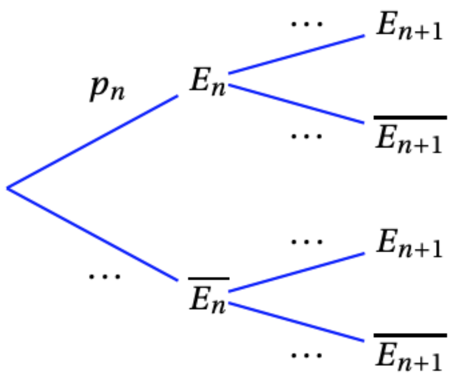
On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$.

1. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

2. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

3. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous :



4. Montrer que, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

5.

a. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme u_1 et la raison *q*.

b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de *n*.

c. En déduire la limite de la suite p_n.

Exercice 4 *5 points*

On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$.

1. Expliquer pourquoi *f* est définie sur $\mathbb{R}$.

2.

a. Quelle est la période de *f* ?

b. Quelle est la parité de *f* ?

c. Justifier que l'on peut étudier la fonction *f* sur $[0;\pi]$ et expliquer comment en déduire l'étude de *f* sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=\dfrac{1+2\cos(x)}{(2+\cos(x))^2}$.

4. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0;\pi]$ et construire le tableau de variations de *f*.