Correction du BB2

exo 1 : QCM

1C 2B 3A 4D 5D

explications:

1. $\frac{1+2^n}{3+5^n} = \frac{2^n\left(\frac{1}{2^n}+1\right)}{5^n\left(\frac{3}{5^n}+1\right)} = \underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)^n}_{\to 0} \underbrace{\frac{\overbrace{\frac{1}{2^n}}^{\to 0}+1}{\underbrace{\frac{3}{5^n}}_{\to 0}+1}}_{\to 1}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2^n}{3+5^n} = 0$

2. $f'(x) = 2x\ln x + \frac{1}{x}\times x^2$
$= 2x\ln x + x$
$= x(2\ln x + 1)$

3.

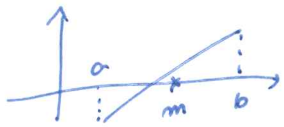
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h(x)$				$-$	0	$+$	
H		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	

Donc sur $]-\infty;0]$ H est positive.

4. la réponse c est fausse car while abs(b-a) ≤ 0,001 n'est pas la bonne condition.
la réponse b est fausse car on actualise pas m (pas dans la boucle)

choix entre la a et la d.

on a :



$f(a) < 0$ Donc si $f(m) < 0$ m remplace le a
$f(b) > 0$ car $f(a) < 0$, $f(m) < 0$ $\to$ sur $[a;m]$ il n'y a pas le 0.

Donc réponse d.

5. cas $P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{7}{10}\right)^1\left(\frac{3}{10}\right)^2$

exo 2

Partie A :

1. $u(x) = xe^{-x}$
$u'(x) = 1\times e^{-x} - e^{-x}\times x$
$= e^{-x} - xe^{-x}$

Donc $u'(x) + u(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x}$
$= e^{-x}$

Donc u solution de (E).

2. $y' + y = 0$
$y' = -y$
Donc les solutions de (E') sont de la forme : $y = Ce^{-x}$, $C\in\mathbb{R}$.

3. Les solutions de (E) sont de la forme :
$y = u(x) + Ce^{-x}$ Donc $y = xe^{-x} + Ce^{-x}$, $C\in\mathbb{R}$.

4. On cherche c tq $g(0)=2$

cad $0e^{-0} + ce^{-0} = 2$

$+ c = 2$

Donc $g(x) = xe^{-x} + 2e^{-x}$

$g(x) = (x+2)e^{-x}$.

(B) :

1. $f'_k(x) = 1e^{-x} - e^{-x}(x+k)$

$= e^{-x}(1-x-k)$

$e^{-x} > 0$ donc $f'_k(x)$ est du signe de $1-x-k$.

Posons $1-x-k=0$

$x = 1-k$.

x	$-\infty$		$1-k$		$+\infty$
$f'_k(x)$		$+$	0	$-$	
f_k		$\nearrow$		$\searrow$	

Donc f_k admet un maximum en $x=1-k$.

2. $f_k(1-k) = (1-k+k)e^{-(1-k)}$

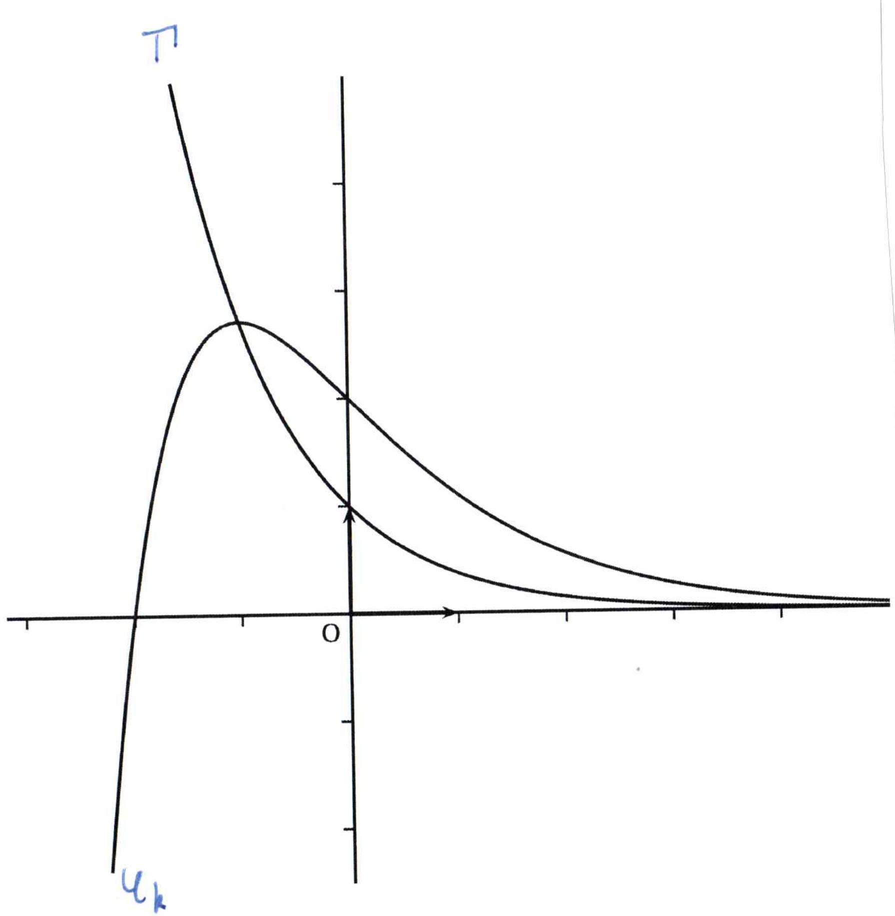
$= e^{-(1-k)}$

Donc lorsque $x = 1-k$, $f_k(x) = e^{-x}$.

Donc le pt Π_k d'abscisse $1-k$ appartient à la courbe Γ d'éq. $y = e^{-x}$.

3.

a.



b. $y = e^{-0} = 1$

Donc la courbe Γ passe par le point de coordonnées $(0;1)$. Donc l'axe des ordonnées a pour unité 1.

$y = e^{-(-1)} = e^{1} = e \simeq 2{,}71$

Donc la courbe Γ passe par le point $(-1;e)$. Donc l'axe des abscisses a pour unité 1.

$f_k(0) = (0+k)e^{-0} = k$ la courbe $\mathscr{C}_k$ passe par le point $(0;k)$

Comme la courbe passe par le point $(0;2)$ alors $k=2$.

4. $I = \int_0^2 (x+2)e^{-x}dx.$

Posons $u = x+2$ $u' = 1$
$v' = e^{-x}$ $v = -e^{-x}$

par intégration par parties on a :

$I = [-(x+2)e^{-x}]_0^2 + \int_0^2 e^{-x}dx.$

$I = -4e^{-2} + 2e^{-0} + [-e^{-x}]_0^2$

$= -4e^{-2} + 2 - e^{-2} + e^{0}$

$= -4e^{-2} + 2 - e^{-2} + 1$

$= 3 - 5e^{-2}$

no 3

1. a. $u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-0\times x}}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx.$

$= \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}dx \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx.$

$= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}dx.$

$= \int_0^1 dx$

$= [x]_0^1$

$= 1$

b. $u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$

$= [-\ln(1+e^{-x})]_0^1$

$= -\ln(1+e^{-1}) + \ln(1+e^{0})$

$= -\ln(1+e^{-1}) + \ln 2 = \ln\left(\frac{2}{e+1}\right)+1$

Donc $u_0 = 1 - u_1$
$= 1 + \ln(1+e^{-1}) - \ln 2 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

2. $e^{-nx} > 0$ donc $\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} > 0$ comme $0<1$
$1+e^{-x} > 0$ alors $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx > 0$

3.a $u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx.$

$= \int_0^1 \left[\frac{e^{-nx-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\right] dx.$

$= \int_0^1 \frac{e^{-nx} \times e^{-x} + e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx.$

$= \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}}\,dx.$

$= \int_0^1 e^{-nx}\,dx.$

$= \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1$

$= -\frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n}e^{0}$

$= \frac{1-e^{-n}}{n}$

b. Comme $u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

alors on a aussi $u_{n+1} \geqslant 0$ $\quad \} + u_n$

$\underbrace{u_{n+1} + u_n}_{} \geqslant u_n$

$\frac{1-e^{-n}}{n} \geqslant u_n.$

4. On a $0 < u_n \leqslant \frac{1-e^{-n}}{n}$

et $\frac{1-e^{-n}}{n} = \frac{1}{n} - \frac{e^{-n}}{n}$

De (+) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{n} = 0$

d'après le th. des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Ex04

1 a. $H(0;3;2)$

$G(5;3;2)$

b. la droite (GH) passe par $H(0;3;2)$ et à pour vecteur directeur $\vec{HG}\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$. Donc on a :

$(GH) : \begin{cases} x = 5t \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

2. $\vec{HM}\begin{pmatrix} x_n - 0 \\ y_n - 3 \\ z_n - 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{HG}\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$

Comme $\vec{HM} = k\vec{HG}$ on a :

$\begin{cases} x_n = 5k \\ y_n - 3 = 0k \\ z_n - 2 = 0k \end{cases} \quad \begin{cases} x_n = 5k \\ y_n = 3 \\ z_n = 2 \end{cases} \quad k \in [0;1]$

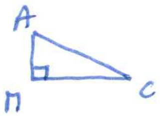
b. $\vec{AM}\begin{pmatrix}5k\\3\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{CM}\begin{pmatrix}5k-5\\3-3\\2-0\end{pmatrix}$ car $C(5;3;0)$

$\vec{CM}\begin{pmatrix}5k-5\\0\\2\end{pmatrix}$

Donc $\vec{AM}\cdot\vec{CM} = 5k(5k-5)+3(0)+2\times 2$

$= 25k^2-25k+4$

c. AMC rectangle en M



$\Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{CM}=0$

$\Leftrightarrow 25k^2-25k+4=0$

$\Leftrightarrow \Delta=(-25)^2-4\times 25\times 4$

$\Delta = 225$

$k_1=\dfrac{25-\sqrt{225}}{2\times 25}$ $\qquad k_2=\dfrac{25+\sqrt{225}}{2\times 25}$

$\boxed{k_1=\frac{1}{5}}$ $\qquad \boxed{k_2=\frac{4}{5}}$

3a. $\vec{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan (ACD)

Donc on a : $2z+d=0$

Comme $A(0;0;0)$ est un pt du plan alors :

$2\times 0+d=0$

$d=0$

Donc $2z=0$

$\boxed{z=0}$

Autre méthode :

$A(0;0;0)$
$C(5;3;0)$ $\qquad z_A=z_C=z_D=0$
$D(0;3;0)$ $\qquad$ Donc $z=0$.

b. $\vec{KM}\begin{pmatrix}1-1\\3-3\\2-0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{KM}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=\vec{AE}$ donc $\vec{KM}$ est un vecteur normal au plan (ACD)

Comme $K\in(ACD)$ alors K est le projeté de M sur (ACD)

c. $V(MACD)=\frac{1}{3}\text{Aire}(ACD)\times MK$

$\text{Aire}(ACD)=\dfrac{AD\times DC}{2}$ $\qquad MK=\sqrt{0^2+0^2+2^2}$

$=\dfrac{3\times 5}{2}$ $\qquad MK=2$

$=\dfrac{15}{2}$

Donc $V(MACD)=\frac{1}{3}\times\frac{15}{2}\times 2$

$V(MACD)=5$

4. $V(MACD)=\frac{1}{3}\text{Aire}(AMC)\times DP$

$\text{Aire}(AMC)=\dfrac{AM\times MC}{2}$ car AMC rectangle en M.

$AM=\sqrt{1^2+3^2+2^2}$

$=\sqrt{14}$

$MC=\sqrt{(5-1)^2+(3-3)^2+(0-2)^2}$

$=\sqrt{4^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{20}$

Donc $\text{Aire}(AMC)=\dfrac{\sqrt{14}\times\sqrt{20}}{2}=\sqrt{70}$

$V(MACD)=\frac{1}{3}\times\sqrt{70}\times DP$

$5=\frac{1}{3}\sqrt{70}\cdot DP$

$DP=\dfrac{5}{\frac{1}{3}\sqrt{70}}\simeq 1{,}8$ à 10^{-1} près.