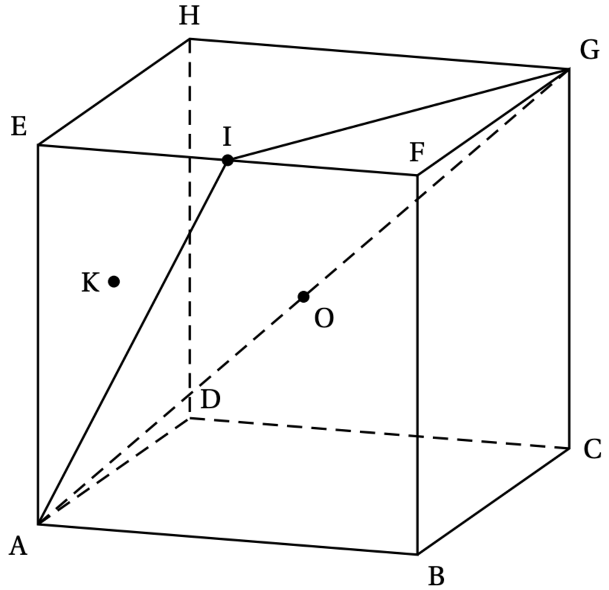
Interrogation de mathématique n°4

Exercice 1 *7 points*

On considère le cube *ABCDEFGH* d'arête de longueur 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

Le point *I* est le milieu du segment $[EF]$, *K* le centre du carré *ADHE* et *O* le milieu du segment $[AG]$.



Le but de l'exercice est de calculer de deux manières différentes, la distance du point *B* au plan (AIG).

Partie 1. Première méthode

1. Donner, sans justification, les coordonnées des points *A*, *B*, et *G*. On admet que les points *I* et *K* ont pour coordonnées $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ et $K\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

2. Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).

3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est : $2x-y-z=0$.

4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BK).

5. En déduire que le projeté orthogonal *L* du point *B* sur le plan (AIG) a pour coordonnées $L\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

6. Déterminer la distance du point *B* au plan (AIG).

Partie 2. Deuxième méthode

On rappelle que le volume *V* d'une pyramide est donné par la formule $V=\frac{1}{3}\times b\times h$, où *b* est l'aire d'une base et *h* la hauteur associée à cette base.

1. a. Justifier que dans le tétraèdre *ABIG*, $[GF]$ est la hauteur relative à la base *AIB*.

b. En déduire le volume du tétraèdre *ABIG*.

2. On admet que $AI=IG=\frac{\sqrt{5}}{2}$ et que $AG=\sqrt{3}$.

Démontrer que l'aire du triangle isocèle *AIG* est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

3. En déduire la distance du point *B* au plan (AIG).

Exercice 2 *6 points*

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons ;
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque.

On considère les évènements suivants :

- C : « le casque est contrefait » ;
- D : « le casque présente un défaut de conception » ;
- $\overline{C}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de C et D.

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1

1. Calculer $P(C\cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que $P(D)=0{,}036$.

3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

Partie 2

On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n = 35$.
a. Justifier que X suit une loi binomiale $B(n; p)$ où $n = 35$ et $p = 0,036$.

b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.

c. Calculer $P(X \leq 1)$.

2. Dans cette question, n n'est pas fixé.
Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur à 0,99 ?

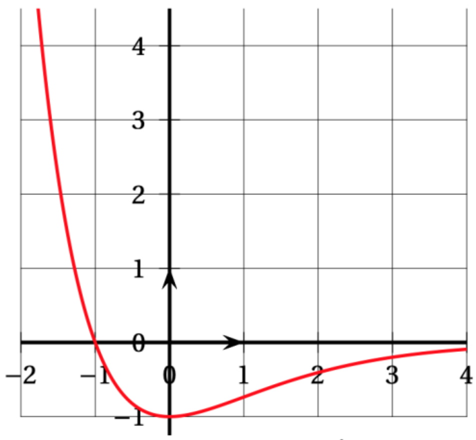
Exercice 3 *7 points*

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie 2

On admet que la fonction *f* mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(x+2)e^{-x}.$$

On note *C* la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On admet que la fonction *f* est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de *f* respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel *x*,

$$f(x)=\frac{x}{e^x}+2e^{-x}.$$

En déduire la limite de *f* en $+\infty$.
Justifier que la courbe *C* admet une asymptote que l'on précisera.
On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2. a. Montrer que, pour tout nombre réel *x*,

$$f'(x)=(-x-1)e^{-x}.$$

b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction *f* et dresser son tableau de variations.

c. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2;-1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

3. Déterminer, pour tout nombre réel *x*, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction *f*.
Que représente pour la courbe *C* son point *A* d'abscisse 0 ?