Correction du DST 4

exo 1

P1

1. $A(0;0;0)$ $B(1;0;0)$ $G(1;1;1)$

2. $\vec{BK}\begin{pmatrix}-1\\0,5\\0,5\end{pmatrix}$ $\vec{AI}\begin{pmatrix}0,5\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{BK}\cdot\vec{AI} = -1\times0,5+0,5\times0+0,5\times1$
$= -0,5+0,5$
$=0$

$\vec{BK}\cdot\vec{AG} = -1\times1+0,5\times1+0,5\times1$
$=-1+1$
$=0$

$\vec{BK}$ est donc orthonogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (AIG). Donc la droite (BK) est bien orthogonale au plan (AIG).

3. Un vecteur normal au plan (AIG) est $\vec{BK}\begin{pmatrix}-1\\0,5\\0,5\end{pmatrix}$.

Donc (AIG) : $-x+0,5y+0,5z+d=0$

De plus $A(0;0;0)$ est un point du plan (AIG).

Donc $-0+0,5\times0+0,5\times0+d=0$
$\Leftrightarrow d=0$

Donc on a $-x+0,5y+0,5z=0$

en multipliant par -2 on a :

(AIG) : $2x-y-z=0$

4. (BK) a pour vecteur directeur $\vec{BK}\begin{pmatrix}-1\\0,5\\0,5\end{pmatrix}$ et passe par $B(1;0;0)$. Donc on a :

$$(BK) : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 0,5t \quad t\in\mathbb{Z} \\ z = 0,5t \end{cases}$$

5. Pour déterminer les coordonnées de L projeté de B sur (AIG) il faut déterminer les coordonnées du point d'intersection de (BK) avec (AIG) car (BK) orthogonal à (AIG).

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 0,5t \\ z = 0,5t \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$$

Donc : $2(1-t)-0,5t-0,5t=0$
$2-2t-t=0$
$-3t=-2$
$t=\frac{2}{3}$

Donc
$$\begin{cases} x = 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \\ y = 0,5\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \\ z = 0,5\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$L\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

6. la distance de B au plan (AIG) est :

$BL=\sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(0-\frac{1}{3}\right)^2}$

$BL=\sqrt{\frac{6}{9}}$

$BL=\frac{\sqrt{6}}{3}$

P2 l'arête [GF] est orthogonale au plan (ABF) qui est aussi le plan (AIB).

1a) Donc si on considère (AIB) comme base du tétraèdre ABIG alors la hauteur relative est [GF].

b) $v = \frac{1}{3} A(ABI) \times GF$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1 \times 1}{2} \times 1$

$= \frac{1}{6}$

2. $\text{Aire}(AIG) = \frac{AO \times AG}{2}$ car (AO) est une médiane mais aussi une hauteur. car le triangle AIG est isocèle en I et O : milieu de [AG].

$IO = \sqrt{0^2 + 0{,}5^2 + (-0{,}5)^2}$

$= \sqrt{0{,}5}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $A(AIG) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

3. $v(AIBG) = \frac{1}{6}$

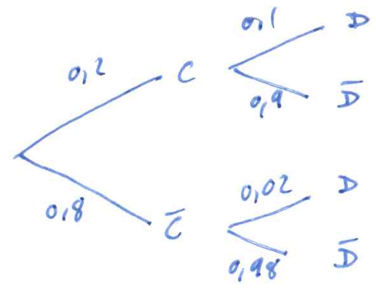
Base : AGI

hauteur : h : Distance de B au plan (AGI)

Donc $v(AIBG) = \frac{\text{Base} \times h}{3} \Leftrightarrow h = \frac{3v(AIBG)}{\text{Base}} = \frac{3 \times \frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

exo 2

P1



1. $P(C \cap D) = P(C) \times P_D(C)$

$= 0{,}2 \times 0{,}1$

$= 0{,}02$

2. $P(D) = P(C \cap D) + P(\bar{C} \cap D)$

$= 0{,}02 + 0{,}8 \times 0{,}02$

$= 0{,}02 + 0{,}016$

$= 0{,}036$

3. $P_D(C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}02}{0{,}036} \simeq 0{,}556$ à 10^{-3} près

P2 1 a. On est en présence d'un schéma de Bernoulli de loi binomiale $B(35 ; 0{,}036)$ car il y a répétition de manière identique et indépendante du choix des casques.

b. $P(X=1) \simeq 0{,}362$

c. $P(X \leq 1) \simeq 0{,}639$

2. $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$

$= 1 - (1-0{,}036)^n$

$= 1 - 0{,}964^n$

On veut que $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow 1 - 0{,}964^n \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow -0{,}964^n \geq -0{,}01$

$\Leftrightarrow 0{,}964^n \leq 0{,}01$ car $-1<0$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}964^n) \leq \ln(0{,}01)$

$\Leftrightarrow n \cdot \ln(0{,}964) \leq \ln(0{,}01)$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}964)}$ car $\ln(0{,}964) < 0$

$\Leftrightarrow n \geq 125{,}6$

Il faut donc commander au moins 126 casques.

exo 3

P1 1. Sur $]-\infty;-1]$ $f'(x) \geq 0$, donc f croissante.

Sur $[-1;+\infty[$ $f'(x) \leq 0$, donc f décroissante

2. Sur $]-\infty;0]$ f' est décroissante donc f concave.

Sur $[0;+\infty[$ f' est croissante donc f convexe.

P2

1. $f(x) = (x+2)e^{-x}$

$= xe^{-x} + 2e^{-x}$

$= \dfrac{x}{e^x} + 2e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (cours) et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

Donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2a. $f(x) = (x+2)e^{-x}$

$f'(x) = 1e^{-x} - e^{-x}(x+2)$

$= e^{-x}(1-x-2)$

$= e^{-x}(-x-1)$

b. Comme $e^{-x} > 0$ alors $f'(x)$ est du signe de $-x-1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

c. f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;-1[$.

$f(]-\infty;-1[) =]-\infty;e[$ et $2 \in]-\infty;e[$.

D'après le th. des val. intermédiaires, l'éq $f(x)=2$ admet 1 unique solution α sur $]-\infty;-1[$.

$f(-2) = 0 < 2$ et $f(-1) = e > 2$ Donc $-2 < \alpha < e$

D'après la calculatrice $\alpha \simeq -1{,}6$ à 10^{-1} près.

3. $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$

$f''(x) = -e^{-x} - e^{-x}(-x-1)$

$= e^{-x}(-1+x+1)$

$= xe^{-x}$

Comme $e^{-x} > 0$ alors $f''(x)$ est du signe de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe.	

$f''(x)$ s'annule en changeant de signe en 0

Donc A est un point d'inflexion pour $\mathcal{C}$.