BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DECEMBRE 2023

MATHÉMATIQUES SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 16**

ÉPREUVE BLANCHE DU VENDREDI 22 DECEMBRE 2023

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de page 1/6 à page 6/6

Exercice 1 *5 points*

On considère la fonction *f* définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x).$$

On note C_f la courbe représentative de *f* dans un repère orthogonal du plan.
On admet que *f* est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Démontrer que la limite de la fonction *f* en 0 est égale à 0.

   b. Déterminer la limite de la fonction *f* en $+\infty$.

2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. **a.** Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$
$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

   b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe C_f est au-dessus de ses tangentes.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   (On admettra que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f'(x) = 2$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = -\infty$)

4. **a.** Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

   b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

5. **a.** En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :
$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$
   En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.

   b. En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction *f*.

Exercice 2 *5 points*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm, on considère les points

$$D(3;1;5),\quad E(3;-2;-1),\quad F(-1;2;1),\quad G(3;2;-3).$$

1. **a.** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$.

   b. Justifier que les points E, F et G ne sont pas alignés.

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG).

   b. On appelle H le point de coordonnées $(2;2;-2)$.
   Vérifier que H est le projeté orthogonal de E sur la droite (FG).

   c. Montrer que l'aire du triangle EFG est égale à 12 cm^2.

3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EFG).

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (EFG).

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point D et orthogonale au plan (EFG).

   d. On note K le projeté orthogonal du point D sur le plan (EFG).
   À l'aide des questions précédentes, calculer les coordonnées du point K.

4. **a.** Vérifier que la distance DK est égale à 5 cm.

   b. En déduire le volume du tétraèdre $DEFG$.

Exercice 3 *5 points*

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.
On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées. Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le *n*-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \text{ et, pour tout entier naturel } n \geq 1,\ u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3.$$

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$

3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

4. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.
Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(8.5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times e^{-0,19\times(n-1)}.$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le *n*-ième mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.

2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de *n* telle que $v_n > 8,5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.
   Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ?
   Justifier votre réponse.

2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?

Exercice 4 — *5 points*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

L'énoncé ci-dessous est commun aux questions 1. 2. et 3.

Les 200 adhérents d'un club sont des filles ou des garçons. Ces adhérents pratiquent l'aviron ou le basket selon la répartition figurant dans le tableau ci-dessous.

	Aviron	**Basket**	**Total**
Filles	25	80	105
Garçons	50	45	95
Total	75	125	200

On choisit un adhérent au hasard et on considère les évènements suivants :
F : l'adhérent est une fille ;
A : l'adhérent pratique l'aviron.

1. La probabilité de F sachant A est égale à :

   a. $\dfrac{25}{100}$ **b.** $\dfrac{25}{75}$ **c.** $\dfrac{25}{105}$ **d.** $\dfrac{75}{105}$

2. La probabilité de l'évènement $A \cup F$ est égale à :

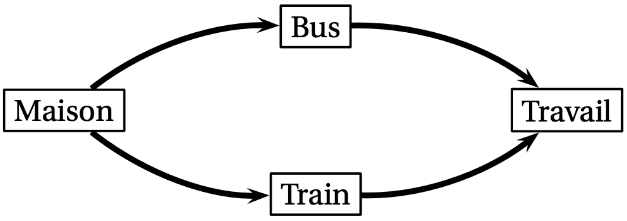
   a. $\dfrac{9}{10}$ **b.** $\dfrac{1}{8}$ **c.** $\dfrac{31}{40}$ **d.** $\dfrac{5}{36}$

3. La probabilité de $\overline{A}$ sachant $\overline{F}$ est égale à :

   a. $\dfrac{9}{19}$ **b.** $\dfrac{9}{25}$ **c.** $\dfrac{9}{16}$ **d.** $\dfrac{9}{10}$

L'énoncé ci-dessous est commun aux questions 3. et 4.

Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train.



La probabilité que le bus soit en panne est égale à b.
La probabilité que le train soit en panne est égale à t.
Les pannes de bus et de train surviennent de façon indépendante.

4. La probabilité p_1 que le bus ou le train soient en panne est égale à :

a. $p_1 = bt$ **b.** $p_1 = 1 - bt$ **c.** $p_1 = b + t$ **d.** $p_1 = b + t - bt$

5. La probabilité p_2 que Albert puisse se rendre à son travail est égale à :

a. $p_2 = bt$ **b.** $p_2 = 1 - bt$ **c.** $p_2 = b + t$ **d.** $p_2 = b + t - bt$