Correction du BB 1

exo 1

1a $\lim\limits_{x\to 0} (5x^2+2x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0} x^2.\ln x = 0$ (cours)

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

b. $f(x)= x^2\left(5+\frac{2}{x}-2\ln x\right)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (-2\ln x)=-\infty$

$\Big\}$ Donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(5+\frac{2}{x}-2\ln x\right)=-\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$

2. $f'(x)= 5\times 2x+2-4x.\ln x-2x^2\times\frac{1}{x}$

$= 10x+2-4x\ln x-2x$

$= 8x+2-4x\ln x.$

3a. $f''(x)= 8-4\ln x-4x\times\frac{1}{x}$

$= 8-4\ln x-4$

$= 4-4\ln x$

$= 4(1-\ln x)$

b. $\mathcal{C}_f$ au dessus de ses tangentes lorsque f est convexe, autrement dit $f''(x)\geqslant 0$.

$4(1-\ln x)\geqslant 0$

$1-\ln x\geqslant 0$

$1\geqslant \ln x$

$e\geqslant x$

soit sur $]0;e]$. (On rappelle que f est définie sur $]0;+\infty[$)

c.

x	0		e		$+\infty$
$f''(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f'	$\|\|$ 2	$\nearrow$	$4e+2$	$\searrow$	$-\infty$

4a. $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=2$ car $\lim\limits_{x\to 0}(8x+2)=2$

et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)=-\infty$ car $f'(x)= x\left(8+\frac{2}{x}-2\ln x\right)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(8+\frac{2}{x}-2\ln x\right)=-\infty$

admis

mais voilà la démo.

- sur $]0;e]$ f' admet 2 comme minorant donc $f'(x)=0$ n'a pas de solution.

* f' est continue et st $\searrow$ sur $[e;+\infty[$.
$f'([e;+\infty[)=]-\infty;4e+2]$ et $0\in]-\infty;4e+2]$.
… $f'(x)=0$ admet uns α sur $]0;+\infty[$

D'après la calculatrice $7,87 < \alpha < 7,88$ à 10^{-2} près.

b.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Donc on a :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|\|$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	

5a. $f'(\alpha)=0$

$\iff 8\alpha+2-4\alpha\ln\alpha=0$

$\iff 4\alpha\ln\alpha = 8\alpha+2$

$\iff \ln\alpha = \dfrac{8\alpha+2}{4\alpha}$

$\iff \ln\alpha = \dfrac{4\alpha+1}{2\alpha}$

$f(\alpha) = 5\alpha^2+2\alpha-2\alpha^2(\ln\alpha)$

$= 5\alpha^2+2\alpha-2\alpha^2 \cdot \dfrac{4\alpha+1}{2\alpha}$

$= 5\alpha^2+2\alpha-\alpha(4\alpha+1)$

$= 5\alpha^2+2\alpha-4\alpha^2-\alpha$

$= \alpha^2+\alpha$

b $7,87<\alpha<7,88$ donc $61,94 < \alpha^2 < 62,09$

donc $69,1 < f(\alpha) < 70$

exo 2

1 a. $\vec{EF}\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ $\vec{FG}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

b. Les coordonnées des vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{FG}$ ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, les points E, F et G ne sont donc pas alignés.

2a. La droite (FG) passe par F et a pour vecteur directeur $\vec{FG}$. Sa représentation paramétrique est alors :

$(FG) : \begin{cases} x = x_F + x_{\vec{FG}}\cdot t \\ y = y_F + y_{\vec{FG}}\cdot t \\ z = z_F + z_{\vec{FG}}\cdot t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$

$\begin{cases} x = -1+4t \\ y = 2 \\ z = 1-4t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$

b. Pour que H soit le projeté orthogonal de E sur (FG) il suffit que $\vec{HE}$ et $\vec{FG}$ soient orthogonaux et que $H\in(FG)$.

$\vec{HE}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{FG}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{HE}\cdot\vec{FG} = 1\times4-4\times0+1\times(-4)$

$=4-4$

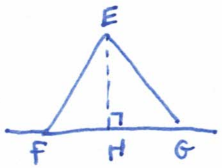
$=0$

Donc $\vec{HE}$ et $\vec{FG}$ sont orthogonaux.

$H\in(FG)$? $\begin{cases} x_H = -1+4t \\ y_H = 2 \\ z_H = 1-4t \end{cases}$ $\begin{cases} 2=-1+4t \\ 2=2 \\ -2=1-4t \end{cases}$ $\begin{cases} t=\frac{3}{4} \\ t=\frac{3}{4} \end{cases}$

Donc $H\in(FG)$.

c. H est le projeté de E sur (FG).



Donc Aire $(EFG) = \dfrac{EH \times FG}{2}$

$EH = \sqrt{1^2+(-4)^2+1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$FG = \sqrt{4^2+0^2+(-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Donc Aire $(EFG) = \dfrac{3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{2} = 12 \text{ cm}^2$

3a. $\vec{n}\cdot\vec{EF} = 2\times(-4) + 1\times 4 + 2\times 2$
$= -8+4+4$
$= 0$ Donc $\vec{n} \perp \vec{EF}$

$\vec{n}\cdot\vec{FG} = 2\times 4 + 1\times 0 + 2\times(-4)$
$= 8-8$
$= 0$ Donc $\vec{n} \perp \vec{FG}$

Donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EFG).

b. On a $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ vect. normal de (EFG) :

On a alors : $2x + y + 2z + d = 0$

or $E(3;-2;-1) \in (EFG)$ donc on a :

$2\times 3 - 2 + 2\times(-1) + d = 0$
$2 + d = 0$
$d = -2$

Donc $(EFG) : 2x + y + 2z - 2 = 0$

c. $(d) \perp (EFG)$ donc son vecteur direction est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ vect. normal à (EFG).

(d) passe par $D(3;1;5)$. On a donc :

$$(d) : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

d. Il faut résoudre : car $K \in (d)$ et $K \in (EFG)$.

$$\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 1+t \\ z = 5+2t \\ 2x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$2(3+2t) + 1 + t + 2(5+2t) - 2 = 0$
$9t + 15 = 0$
$t = -\frac{5}{3}$.

$$\text{Donc } \begin{cases} x = 3 + 2\times\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{3} \\ y = 1 - \frac{5}{3} = -2/3 \\ z = 5 + 2\left(-5/3\right) = \frac{5}{3} \end{cases} \qquad K\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

4a. $DK = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}-3\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{5}{3}-5\right)^2}$
$= \sqrt{\left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2}$
$= \sqrt{25}$
$= 5$

b. $\text{volume}(DEFG) = \dfrac{\text{Aire}(EFG) \times DK}{3}$

$= \dfrac{12 \times 5}{3}$

$= 20 \text{ cm}^3$

Exo 3

A)

1. $u_2 = 0{,}9\, u_1 + 1{,}3$
$= 0{,}9 \times 3 + 1{,}3$
$= 4$

$u_3 = 0{,}9\, u_2 + 1{,}3$
$= 0{,}9 \times 4 + 1{,}3$
$= 4{,}9$

Il y a 400 questions le 2e mois et 490 questions le 3e mois.

2. (I) pour $n = 1$

$u_1 = 3 \qquad 13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^1 = 13 - \dfrac{90}{9} = 3.$

Donc vrai pour $n = 1$.

(H) Sup. $\exists n \in \mathbb{N} \mid u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n$.

mq $u_{n+1} = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1}$

$u_{n+1} = 0{,}9\, u_n + 1{,}3$

$= 0{,}9\left(13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n\right) + 1{,}3$

$= 11{,}7 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1} + 1{,}3$

$= 13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^{n+1}$

(C) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n$

3. $(0{,}9)^n \searrow$ car $0 < 0{,}9 < 1$

$-\dfrac{100}{9} < 0$ Donc $\left(-\dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n\right) \nearrow$

Donc $(u_n) \nearrow$.

4. le programme renvoie le plus petit n tq $u_n > p$.
il suffit donc de résoudre :

$u_n > 8{,}5$

$\Leftrightarrow 13 - \dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n > 8{,}5$

$\Leftrightarrow -\dfrac{100}{9} \times 0{,}9^n > -4{,}5$

$\Leftrightarrow 0{,}9^n \leq \dfrac{4{,}5 \times 9}{100}$

$\Leftrightarrow \ln(0{,}9^n) \leq \ln\left(\dfrac{4{,}5 \times 9}{100}\right)$

$\Leftrightarrow n . \ln(0{,}9) \leq \ln\left(\dfrac{4{,}5 \times 9}{100}\right)$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln\left(\frac{4{,}5 \times 9}{100}\right)}{\ln(0{,}9)}$ car $\ln(0{,}9) < 0$

$\Leftrightarrow n \geq 8{,}6$

Donc A partir de $n = 9$.
A partir du 9e mois, il y aura plus de 850 questions.

B)

1. $v_1 = 9 - 6e^0$
$= 3$

$v_2 = 9 - 6e^{-0{,}19}$
$v_2 \simeq 4{,}04$

?. $v_n > 8,5$

$\iff 9 - 6e^{-0,19(n-1)} > 8,5$

$\iff -6e^{-0,19(n-1)} > -0,5$

$\iff e^{-0,19(n-1)} < \frac{0,5}{6}$ car $-6<0$

$\iff -0,19(n-1) < \ln\left(\frac{0,5}{6}\right)$

$n-1 > \frac{\ln\left(\frac{0,5}{6}\right)}{-0,19}$ car $-0,19<0$

$n > \frac{\ln\left(\frac{0,5}{6}\right)}{-0,19} + 1$

$n > 14,08$

Donc à partir de $n = 15$.

C

$u_n > 8,5$ A partir de $n=9$ (9e mois)

1) $v_n > 8,5$ A partir de $n=15$ (15e mois)

La première modélisation procède le plus tôt à cette modification.

2) $\lim u_n = 13$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ car $-1<0,9<1$

$\lim v_n = 9$

car $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} -0,19(n-1) = -\infty \\ \lim\limits_{N\to-\infty} e^N = 0\end{array}\right\}$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-0,19(n-1)} = 0$

Donc à long terme, il y aura plus de questions avec la 1re modélisation.

Ex 4

1B 2C 3A 4D 5B