DST de mathématiques n°2

Durée de l'épreuve : **2 heures**

L'usage de la calculatrice est autorisé

Le sujet propose 4 exercices

Exercice 1 — *4 points*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-3x+1}$.

a. C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

b. C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$

c. C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$

d. C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{3}$

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel *n* par : $u_n = e^{2n+1}$

La suite (u_n) est :

a. Arithmétique de raison 2

b. Géométrique de raison *e*

c. Géométrique de raison e^2

d. Convergente vers *e*

Pour les questions **3.** et **4.**, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 15$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 1,2u_n + 12$.

3. La fonction Python suivante, dont la ligne 4 est incomplète, doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n telle que $u_n > 10000$.

```
def seuil() :
    n=0
    u=15
    while ......:
      n=n+1
      u=1,2*u+12
    return(n)
```

À la ligne 4, on complète par :

a. $u \leq 10000$ **b.** $u = 10000$ **c.** $u > 10000$ **d.** $n \leq 10000$

4. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 60$.
La suite (v_n) est :

a. Une suite décroissante
b. Une suite géométrique de raison 1,2
c. Une suite arithmétique de raison 60
d. Une suite ni géométrique ni arithmétique

Exercice 2 *4,5 points*

Déterminer les limites suivantes en expliquant la démarche.

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \dfrac{x-5}{x-3}$ **2.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ **3.** $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{\dfrac{4x^2 - 1}{9x^2 + 1}}$

Exercice 3 ***6 points***

On considère la fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=xe^{-x}.$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan. On admet que *f* est deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout *x* dans $[0;+\infty[$, on a

$$f(x)=\frac{x}{e^x},$$

démontrer que la courbe C_f possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.

2. Démontrer que pour tout réel *x* appartenant à $[0;+\infty[$:

$$f'(x)=(1-x)e^{-x}.$$

3. Dresser le tableau de variations de *f* sur $[0;+\infty[$, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

4. On admet que pour tout *x* appartenant à $[0;+\infty[$:

$$f''(x)=e^{-x}(x-2).$$

Étudier la convexité de la fonction *f* sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

5.

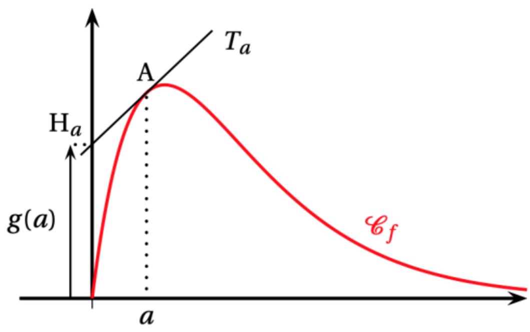
Soit *a* un réel appartenant à $[0;+\infty[$ et *A* le point de la courbe C_f d'abscisse *a*.

On note T_a la tangente à C_f en *A*.

On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.

On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a.

La situation est représentée sur la figure ci-contre.



a. Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est :

$$y=\left[(1-a)e^{-a}\right]x+a^2e^{-a}.$$

b. En déduire l'expression de $g(a)$.

c. Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque *A* est un point d'inflexion de la courbe C_f.

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 4 ***5,5 points***

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel *n*, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$$

1. a. Démontrer que $u_1 = 12$.

b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.

c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n \geq n+1$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel *n* par : $v_n = u_n - n - 1$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme v_0.

b. En déduire, pour tout entier naturel *n*, l'expression de v_n en fonction de *n*.

c. En déduire que pour tout entier naturel *n* : $u_n = 2\times 5^n + n + 1$.

d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n \geq 10^7$.

a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.

b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```