Correction du DST2

Exercice 1

1c 2c 3a 4b.

explications :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\Big\}$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2. $u_{n+1} = e^{2(n+1)+1}$
$= e^{2n+2+1}$
$= e^{2n+1+2}$
$= e^{2n+1} \times e^2$
$= e^2 \cdot u_n$

3. On veut $u_n > 10000$
On veut tant que $u \leq 10000$

4. $v_{n+1} = u_{n+1} + 60$
$= 1{,}2u_n + 12 + 60$
$= 1{,}2u_n + 72$
$= 1{,}2(u_n + 60)$
$= 1{,}2\, v_n$

exercice 2

1. $\lim\limits_{x\to 3}(x-5) = -2$
$\lim\limits_{x\to 3}(x-3) = 0$
Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{x-5}{x-3} = +\infty$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	

2. $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2} = \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{x+3}{x-1}$

Donc $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x-1} = \dfrac{5}{1} = 5$.

3. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4x^2-1}{9x^2+1} = \dfrac{63}{145}$ et $\lim\limits_{X\to\frac{63}{145}} \sqrt{X} = \sqrt{\dfrac{63}{145}}$ $\Big\}$ Donc $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{\dfrac{4x^2-1}{9x^2+1}} = \sqrt{\dfrac{63}{145}}$

exercice 3

1. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'éq. $y=0$ en $+\infty$.

2. $f'(x) = 1 \times e^{-x} - e^{-x} \times x$
$= e^{-x}(1-x)$

3. $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

4. On a $e^{-x} > 0$ Donc $f''(x)$ est du signe de $x-2$.

x	0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Sur $[0;2]$ f est concave.
Sur $[2;+\infty[$ f est convexe.

5. a) $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$f(a) = ae^{-a}$

$f'(a) = (1-a)e^{-a}$

Donc $y = [(1-a)e^{-a}](x-a) + ae^{-a}$

$y = [(1-a)e^{-a}]x - (1-a)e^{-a} \cdot a + ae^{-a}$

$y = [(1-a)e^{-a}]x - ae^{-a} + a^2e^{-a} + ae^{-a}$

$y = [(1-a)e^{-a}]x + a^2e^{-a}$

b. pour $x = 0$ $y = a^2e^{-a}$

c. Soit $g(x) = x^2e^{-x}$

$g'(x) = 2xe^{-x} - e^{-x} \times x^2$

$= e^{-x}(2x - x^2)$

$= x(2-x)e^{-x}$

or $e^{-x} > 0$

$x \geq 0$ sur $[0;+\infty[$

Donc $g'(x)$ est du signe de $2-x$

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		↗		↘	

Donc g est maximum pour $x = 2$ cad au pt d'inflexion de f.

Exo4

1.a. $u_1 = 5u_0 - 4\times0 - 3$
$= 5\times3 - 0 - 3$
$= 15 - 3$
$= 12$

b. $u_2 = 5u_1 - 4\times1 - 3$
$= 5\times12 - 4 - 3$
$= 60 - 7$
$= 57$

c. Il semble que (u_n) soit croissante et tende vers $+\infty$.

2a. (I) pour $n=0$
$u_0 = 3$ Donc $u_0 \geq 0+1$
$0+1 = 1$ vraie pour $n=0$

(H) Supposons qu'il existe un entier n tq
$u_n \geq n+1$
Mq $u_{n+1} \geq n+2$

On a $u_n \geq n+1$
$5u_n \geq 5n+5$ car $5>0$
$5u_n - 4n - 3 \geq 5n+5 - 4n - 3$
$u_{n+1} \geq n+2$

ccl: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n+1$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3a. $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) - 1$
$= 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1$
$= 5u_n - 5n - 5$
$= 5(u_n - n - 1)$
$= 5v_n$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $q=5$.
Son 1er terme est $v_0 = u_0 - 0 - 1$
$= 3 - 1$
$= 2$

b. $v_n = v_0 \cdot q^n$
$v_n = 2\times5^n$

c. $v_n = u_n - n - 1$
Donc $u_n = v_n + n + 1$
$u_n = 2\times5^n + n + 1$

d. $u_{n+1} - u_n = 2\times5^{n+1} + n+1+1 - (2\times5^n + n + 1)$
$= 2\times5^{n+1} - 2\times5^n + n + 2 - n - 1$
$= 2\times5^n(5-1) + 1 = 8\times5^n + 1 > 0$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$

$(u_n) \nearrow$

4. a. Def suite ()

```
u = 3
n = 0
while u < 10^7
    u = 5u - 4n - 3
    n = n + 1
return n
```

b. $n = 10$