Interrogation de mathématiques n°1

Exercice 1 ***5 points***

Une entreprise vend des téléviseurs.
Une étude a montré que ces téléviseurs peuvent rencontrer deux types de défauts : un défaut sur la dalle, un défaut sur le condensateur. L'étude indique que :

* 3 % des téléviseurs présentent un défaut sur la dalle et parmi ceux-ci 2 % ont aussi un défaut sur le condensateur.
* 5 % des téléviseurs ont un défaut sur le condensateur.

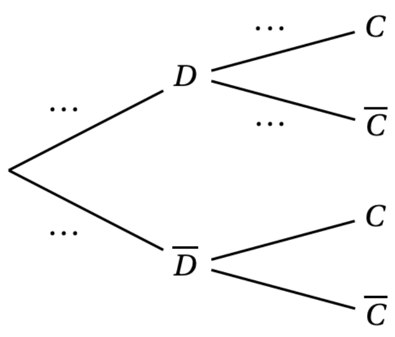
On choisit au hasard un téléviseur et on considère les évènements suivants :

* D : « le téléviseur a un défaut sur la dalle » ;
* C : « le téléviseur a un défaut sur le condensateur ».

Les résultats seront approchés si nécessaire à 10^{-4} près.

1. Exprimer les trois données numériques de l'énoncé sous forme de probabilités.

2. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter uniquement les pointillés par les probabilités associées :



3. Calculer la probabilité $p\left(D\cap C\right)$ de l'évènement $D\cap C$.

4. Le téléviseur choisi a un défaut sur le condensateur. Quelle est alors la probabilité qu'il ait un défaut sur la dalle ?

5. Calculer la probabilité que le téléviseur choisi ait un défaut sur le condensateur mais pas de défaut sur la dalle.

Exercice 2 *5 points*

Sur un site de vente en ligne, Antoine a commandé une machine à café à capsules.

1. Chaque capsule achetée à l'unité coûte 0,60€. Une offre permet d'acquérir 150 capsules au prix de 60€. De quel pourcentage de réduction bénéficie-t-on grâce à l'offre par rapport à un achat à l'unité ?

2. Au 1er janvier 2017, on comptait 60 000 utilisateurs de cette machine à café. On estime que chaque mois, 10 % des propriétaires cessent de l'utiliser mais on compte 24 000 nouveaux utilisateurs.
a. Expliquer pourquoi le nombre d'utilisateurs de cette machine à café n mois après le 1er janvier 2017, peut être modélisé par la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 60000 \text{ et } u_{n+1} = 0,9u_n + 24\ 000.$$

b. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par : $v_n = u_n - 240\ 000$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3. a. Exprimer v_n en fonction de *n*.

b. En déduire que pour tout entier naturel *n*, $u_n = 240\ 000 - 180\ 000 \times 0,9^n$.

4. Au bout de combien de mois le nombre d'utilisateurs de cette machine à café dépassera-t-il pour la première fois 230 000 ?

5. L'entreprise qui fabrique cette machine à café prétend qu'elle touchera un certain mois plus de 250 000 utilisateurs. Que penser de cette affirmation ?

Exercice 3 *4 points*

On considère les points $M(1;3)$, $N(4;-2)$ et $P(-2;-1)$.

1. Déterminer $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$.

2. En déduire une valeur approchée de $\widehat{NMP}$ à 0,1 degrés prés.

3. Déterminer la valeur exacte de la distance *MN*.

4. Soit *A* le projeté orthogonal de *P* sur la droite (MN).
En déduire la distance *MA*.

Exercice 4 ***4 points***

Une entreprise produit entre 1 millier et 5 milliers de pièces par jour.
Le coût moyen de production d'une pièce, en milliers d'euros, pour *x* milliers de pièces produites, est donné par la fonction *f* définie pour tout réel *x* de l'intervalle $[1;5]$ par :

$$f(x)=\frac{0,5x^3-3x^2+x+16}{x}$$

1. Calculer le coût moyen de production d'une pièce lorsque l'entreprise produit 2 milliers de pièces.

2. On admet que de *f* est dérivable sur $[1;5]$. Montrer que pour tout réel *x* de $[1;5]$, on a :

$$f'(x)=\frac{(x-4)(x^2+x+4)}{x^2}$$

3. Résoudre $f'(x)=0$, puis dresser le tableau de variation de *f* sur $[1;5]$.

4. Déterminer le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de production d'une pièce soit minimal, ainsi que la valeur de ce coût minimal.

Exercice 5 ***2 points***

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et par $u_{n+1}=2u_n-1$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $u_n=2^{n+1}+1$