Bac blanc 2 : Correction

Exercice 1 : Nouvelle Calédonie 2 – Octobre 22

1. **a.** Somme de produits de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, f est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.

b. On a $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \mathrm{e} - 2 = -2$.
De plus $f'(\mathrm{e}) = \ln\mathrm{e} = 1$.
On sait que $M(x\,;\,y) \in (T) \iff y - (-2) = 1(x - \mathrm{e}) \iff y = x - 2 - \mathrm{e}$.

c. De $f'(x) = \ln x$, on en déduit que $f''(x) = \dfrac{1}{x}$.
Comme $x > 0$, on a donc $f''(x) > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$: la fonction f est donc convexe sur cet intervalle.

d. Le résulta précédent montre que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la tangente T.

2. **a.** On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, que $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$

b. On a pour tout réel $x \in]0\,;\,+\infty[$, on peut écrire :
$f(x) = x[\ln(x) - 1] - 2$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a par produit de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. On a $f'(x) = \ln x$. On sait que :

- sur $]0\,;\,1[$, $\ln x < 0$: donc f décroit sur cet intervalle;
- sur $]1\,;\,+\infty[$, $\ln x > 0$: donc f croit sur cet intervalle;
- $f(1) = -1 - 2 = -3$ est donc le minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ -2	↘	-3	↗	$+\infty$

4. **a.** Le tableau de variations montre que sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, f est strictement croissante de -3 à plus l'infini.
f étant continue car dérivable, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe un réel unique α de $]1\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

b. On a $f(4,3) \approx -0,028$ et $f(4,4) \approx 0,119$.
D'après le même théorème ceci montre que $\alpha \in]4,3\,;\,4,4[$.

c. Conclusion :

- sur $]0\,;\,\alpha[$, $f(x) < 0$;
- sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$;
- $f(\alpha) = 0$.

La fonction `seuil(0.01)` renvoie la valeur 4,32.
Ceci donne l'encadrement de α au centième près : $4,32 < \alpha < 4,33$.

Exercice 2 : Nouvelle Calédonie 2 – Octobre 22

1. B(6; 4; 0), E(0; 4; 4), F(6; 4; 4), G(6; 0; 4).

2. On a $\mathcal{A}(\text{EFGH}) = 6 \times 4 = 24$.

La hauteur de la pyramide est égale à $6 - 4 = 2$, donc :

$V(\text{EFGHS}) = \dfrac{1}{3} \times 24 \times 2 = 16$.

D'autre part $V(\text{ABCDEFGH}) = 6 \times 4 \times 4 = 96$.

Le volume de la maison est donc égal à $16 + 96 = 112$.

Or $\dfrac{V(\text{EFGHS})}{V(\text{maison})} = \dfrac{16}{112}\dfrac{4}{28} = \dfrac{1}{7}$.

3. **a.** On a $\overrightarrow{\text{EF}}\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{ES}}\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{EF}} \cdot \overrightarrow{n} = 6 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$ et

$\overrightarrow{\text{ES}} \cdot \overrightarrow{n} = 3 \times 0 - 2 \times 1 + 2 \times 1 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan (EFS) est donc normal à ce plan.

b. Le résultat précédent montre que :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{EFS}) \iff 0x + 1y + 1z = d, \quad d \in \mathbb{R}$.

Or, par exemple $\text{E}(0; 4; 4) \in (\text{EFS}) \iff 0 + 4 + 4 = d \iff d = 8$.

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{EFS}) \iff y + z = 8$.

4. **a.** On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{PQ}) \iff \overrightarrow{\text{Q}M} = t\,\overrightarrow{k}, \quad (t \in \mathbb{R}) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-2 & = & 0t \\ y-3 & = & 0t \\ z-5,5 & = & 1t \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5,5+t \end{array}\right., \quad (t \in \mathbb{R})$.

b. Les coordonnées du point P vérifient les équations paramétriques de la droite (PQ) et du plan (EFS), donc du système :

$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5,5+t \\ y+z & = & 8 \end{array}\right. \Rightarrow 3 + 5,5 + t = 8 \iff t = -0,5$.

Conclusion : P(2; 3; 5).

c. On a $\text{PQ}^2 = (2-2)^2 + (3-3)^2 + (5,5-5)^2 = 0,25$, donc $\text{PQ} = 0,5$.

5. Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\delta}\begin{pmatrix}6\\-4\\4\end{pmatrix}$ et la droite (PQ) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$:

ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

Elles sont sécantes s'il existe un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ dont les coordonnées vérifient les équations des deux droites soit le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5,5+t \\ x & = & -4+6s \\ y & = & 7-4s \\ z & = & 2+4s \end{array}\right.$$

On en déduit (équations 1 et 4) que $2=-4+6s \iff 6=6s \iff s=1$ et (équations 3 et 6) que $5,5+t=2+4 \iff t=0,5$.

Il existe donc un point commun aux deux droites de coordonnées $(2;3;4)$

Reprenons les équations paramétriques de la droite (PQ) : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{PQ}) \iff$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5,5+t \end{array}\right. \quad , \quad (t \in \mathbb{R})$$

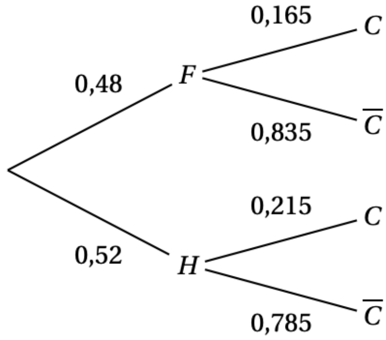
L'abscisse et l'ordonnée de tous les points de cette droite sont fixes, seule la cote varie de 5 pour P (correspondant à $t=-0,5$ à 5,5 pour Q (correspondant à $t=0$) ; autrement dit les points du segment vérifient le système :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in [\text{PQ}] \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3 \\ z & = & 5,5+t \end{array}\right. \quad , \quad (-0,5 \leqslant t \leqslant 0).$$

Le point commun aux deux droites correspond lui à $t=0,5$, donc n'appartient pas au segment [PQ] : autrement dit l'oiseau ne va pas percuter l'antenne représentée par le segment [PQ].

Exercice 3 : Centres étrangers groupe 1 sujet 2 – Mai 22

1. L'arbre complété avec les valeurs disponibles :



2. Calculons $p(C \cap F)$: $p(C \cap F) = p_F(C) \times p(F) = 0,165 \times 0,48 = 0,0792$

3. **a.** Utilisons la formule des probabilités totales pour calculer $p(C)$:

$p(C) = p(C \cap F) + p\left(C \cap \overline{F}\right) = p_F(C) \times p(F) + p_{\overline{F}}(C) \times p\left(\overline{F}\right) = 0,165 \times 0,48 + 0,215 \times 0,52 = 0,191$.

b. Si les évènements F et C sont indépendants, alors $p(F \cap C) = p(F) \times p(C)$.

$p(F \cap C) = 0,0792$ et $p(F) \times p(C) = 0,48 \times 0,191 = 0,09168$.

Ces deux résultats sont différents. Les évènements F et C ne sont pas indépendants.

4. D'après la formule de Bayes : $p_C(F) = \dfrac{p(F\cap C)}{p(C)} = \dfrac{0,0792}{0,191} \approx 0,4147$.

La probabilité de choisir une femme sachant qu'elle est cadre est égale à 0,4147.

5. **a.** Il s'agit là d'un schéma de Bernoulli : la répétition de 15 expériences aléatoires n'ayant que deux issues, identiques et indépendantes entre elles. Si on note par X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres dans l'échantillon, alors X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,191$: $X \sim \mathscr{B}(15\ ;\ 0,191)$

b. $p(X \leqslant 1) = p(X=0)+p(X=1) = \dbinom{15}{0}\times 0,191^0 \times (1-0,191)^{15} + \dbinom{15}{1}\times 0,191^1\times(1-0,191)^{15-1}$

$\approx 0,1890$.

c. $E(X) = n \times p = 15 \times 0,191 = 13,65$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.. Cherchons la plus petite valeur de n telle que $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.

$p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 \iff \iff 1 - p(X<1) \geqslant 0,99 \iff 1 - p(X=0) \geqslant 0,99 \iff -p(X=0) \geqslant -0,01$
$\iff p(X=0) \leqslant 0,01 \iff (1-0,191)^n \leqslant 0,01 \iff 0,809^n \leqslant 0,01$.

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$0,809^n \leqslant 0,01 \iff \ln(0,809^n) \leqslant \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,809) \leqslant \ln(0,01)$
$\iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,809)}$ car $\ln(0,809) < 0$. À la calculatrice : $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,809)} \approx 21,73$ donc $n \geqslant 22$.

Il faudra donc que la taille de l'échantillon choisi soit supérieure ou égale à 22.

Exercice 4 : Centres étrangers groupe 1 sujet 2 – Mai 22

1. La fonction g est continue et dérivable. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1\,000x^{999} + 1$.

La fonction g' est continue et dérivable. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = 999 \times 1\,000x^{998} = 999\,000x^{998}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $999\,000x^{998} \geqslant 0$ et g'' s'annule sans changer de signe sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

Réponse b

2. D'après la représentation graphique de f', on peut affirmer que $f'(0) = 1$. La pente de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est égale à 1. Toute droite ayant la même pente est donc parallèle à cette tangente. C'est le cas de la droite d'équation $y = x$.

Réponse a

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donc $-\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $n+1 \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$ et $-\dfrac{1}{n+1} \geqslant -1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$. La suite (u_n) est donc bornée.

Réponse c

4. Soit (v_n) une suite telle que $v_0 = k$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \times v_{n+1} < 0$. Cette inégalité nous permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}$, deux termes consécutifs v_n et v_{n+1} sont de signes opposés. Donc les termes v_{n+1} et v_{n+2} le sont aussi. Donc on peut en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, v_n et v_{n+2} sont de même signe.

Donc v_0, v_2, ..., v_{2k}, avec $k \in \mathbb{N}$ (tous les termes de rangs pairs), sont de même signe, donc du signe de k.

Réponse c

5. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_{n+1} = 2w_n - 4$ et $w_2 = 8$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{w_{n+1}+4}{2}$.
$w_1 = \dfrac{w_2+4}{2} = \dfrac{8+4}{2} = 6$ et $w_0 = \dfrac{w_1+4}{2} = \dfrac{6+4}{2} = 5$ **Réponse b**

6. Il est facile de démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ car $\dfrac{e^n}{e^n+1} > 0$ et $a_0 > 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $e^n < e^n + 1$ donc $\dfrac{e^n}{e^n+1} < 1$ donc $\dfrac{e^n}{e^n+1} a_n < a_n$ donc $a_{n+1} < a_n$. La suite (a_n) est donc strictement décroissante. **Réponse b**

7. D'après l'énoncé, nous savons que le nombre de cellules double à chaque intervalle de temps écoulé. Cherchons le premier entier n tel que $2^n \geqslant 4000$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc
$2^n \geqslant 4000 \iff \ln(2^n) \geqslant \ln(4000) \iff n \times \ln(2) \geqslant \ln(4000) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(4000)}{\ln(2)}$.
À la calculatrice : $\dfrac{\ln(4000)}{\ln(2)} \approx 11,97$ donc $n \geqslant 12$.
Il s'est donc écoulé 12 intervalles de temps pour que le nombre de cellules atteigne 4000 en 4 heures. Chaque intervalle de temps est donc : $\dfrac{4\times 60}{12} = 20$ (min.). **Réponse c**