BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION FEVRIER 2023

MATHÉMATIQUES SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 16**

ÉPREUVE BLANCHE DU VENDREDI 24 FEVRIER 2023

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de page 1/6 à page 6/6

Exercice 1 : Fonctions *5 points*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln x - x - 2$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, on a $f'(x) = \ln x$.

b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $x = e$.

c. Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

d. En déduire la position relative de la courbe C_f et de la tangente T.

2. a. Calculer la limite de la fonction f en 0.

b. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0;+\infty[$.
On note α cette solution.

b. Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4,3;4,4[$.

c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

5. On considère la fonction seuil suivante écrite dans le langage Python :
On rappelle que la fonction log du module math (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien ln.

```
def  seuil(pas) :
     x=4.3
     while x*log (x) - x - 2 < 0:
       x=x+pas
     return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction seuil (0.01) ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace *5 points*

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle *ABCDEFGH* surmonté d'une pyramide *EFGHS*.

On a $DC = 6$, $DA = DH = 4$.

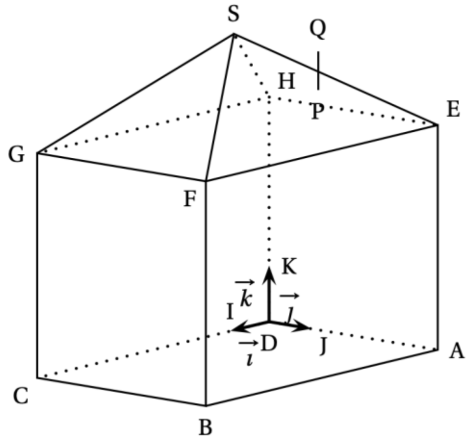
Soit les points *I*, *J* et *K* tels que :

$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DH}$.

On note $\vec{i} = \overrightarrow{DI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{DJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{DK}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On admet que le point *S* a pour coordonnées $(3;2;6)$.



1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points *B*, *E*, *F* et *G*.

2. Démontrer que le volume de la pyramide *EFGHS* représente le septième du volume total de la maison.
On rappelle que le volume *V* d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur} .$$

3. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$.

4. On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment $[PQ]$.
On dispose des données suivantes :

- Le point *P* appartient au plan (EFS) ;
- Le point *Q* a pour coordonnées $(2;3;5,5)$;
- La droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 5,5 + t \end{cases}$$

b. En déduire les coordonnées du point *P*.

c. En déduire la longueur *PQ* de l'antenne.

5. Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -4 + 6s \\ y = 7 - 4s \quad s \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 4s \end{cases}$$

Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ. L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment $[PQ]$?

Exercice 3 : Probabilités *5 points*

Les résultats seront arrondis si besoin à 10^{-4} près.

Une étude statistique réalisée dans une entreprise fournit les informations suivantes :

- 48 % des salariés sont des femmes. Parmi elles, 16,5 % exercent une profession de cadre ;
- 52 % des salariés sont des hommes. Parmi eux, 21,5 % exercent une profession de cadre.

On choisit une personne au hasard parmi les salariés. On considère les évènements suivants :

- F : « la personne choisie est une femme » ;
- C : « la personne choisie exerce une profession de cadre ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre.

3. a. Démontrer que la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à 0,191.

b. Les évènements F et C sont-ils indépendants ? Justifier.

4. Calculer la probabilité de F sachant C, notée $P_C(F)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. On choisit au hasard un échantillon de 15 salariés. Le grand nombre de salariés dans l'entreprise permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres au sein de l'échantillon de 15 salariés. On rappelle que la probabilité qu'un salarié choisi au hasard soit un cadre est égale à 0,191.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre.

c. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.

6. Soit n un entier naturel. On considère dans cette question un échantillon de n salariés. Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à 0,99 ?

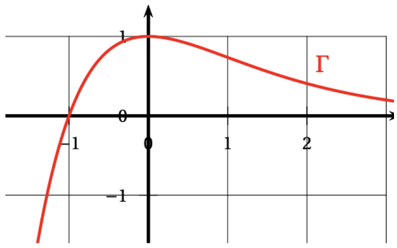
Exercice 4 : QCM *5 points*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g\left(x\right)=x^{1000}+x$. On peut affirmer que :

a. la fonction g est concave sur $\mathbb{R}$.
b. la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$.
c. la fonction g possède exactement un point d'inflexion.
d. la fonction g possède exactement deux points d'inflexion.

2. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f' sa fonction dérivée. On note C la courbe représentative de f. On note Γ la courbe représentative de f'.
On a tracé ci-contre la courbe Γ.



On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.
On peut affirmer que la tangente T est parallèle à la droite d'équation :

a. $y=x$ **b.** $y=0$
c. $y=1$ **d.** $x=0$

3. On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie pour tout entier naturel n par $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
On peut affirmer que la suite $\left(u_n\right)$ est :

a. majorée et non minorée. **b.** minorée et non majorée.
c. bornée. **d.** non majorée et non minorée.

4. Soit k un nombre réel non nul. Soit $\left(v_n\right)$ une suite définie pour tout entier naturel n.
On suppose que $v_0=k$ et que pour tout n, on a $v_n\times v_{n+1}<0$.
On peut affirmer que v_{10} est :

a. positif. **b.** négatif.
c. du signe de k. **d.** du signe de $-k$.

5. On considère la suite $\left(w_n\right)$ définie pour tout entier naturel *n* par : $w_{n+1} = 2w_n - 4$ et $w_2 = 8$.
On peut affirmer que :

a. $w_0 = 0$
b. $w_0 = 5$.
c. $w_0 = 10$.
d. Il n'est pas possible de calculer w_0.

6. On considère la suite $\left(a_n\right)$ définie pour tout entier naturel *n* par : $a_{n+1} = \dfrac{e^n}{e^n + 1} a_n$ et $a_0 = 1$.
On peut affirmer que :

a. la suite $\left(a_n\right)$ est strictement croissante.
b. la suite $\left(a_n\right)$ est strictement décroissante.
c. la suite $\left(a_n\right)$ n'est pas monotone.
d. la suite $\left(a_n\right)$ est constante.

7. Une cellule se reproduit en se divisant en deux cellules identiques, qui se divisent à leur tour, et ainsi de suite.
On appelle temps de génération le temps nécessaire pour qu'une cellule donnée se divise en deux cellules.
On a mis en culture 1 cellule. Au bout de 4 heures, il y a environ 4000 cellules.
On peut affirmer que le temps de génération est environ égal à :

a. moins d'une minute.
b. 12 minutes.
c. 20 minutes.
d. 1 heure.