# Interrogation de mathématiques n°5

**Exercice 1 – 10 points – Nouvelle Calédonie 1 – Octobre 22**

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

On admet que la fonction *f* est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

On note $f'$ sa dérivée et $f''$ sa dérivée seconde.

On note $C_f$ la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthogonal.

**1. a.** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

**b.** Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

**2. a.** Déterminer $f'(x)$ pour tout réel *x* appartenant à $]0;+\infty[$.

**b.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$. En déduire le tableau de variations de *f*.

**3.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4;5]$.

**4.** On admet que, pour tout *x* de $]0;+\infty[$, on a : $f''(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x^2}$.

**a.** Étudier la convexité de la fonction *f* sur $]0;+\infty[$.

On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de $C_f$.

**b.** On note *A* le point de coordonnées $\left(\sqrt{2}; f\left(\sqrt{2}\right)\right)$.

Soit *t* un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$. Soit *M* le point de coordonnées $(t; f(t))$.

En utilisant la question **4. a**, indiquer, selon la valeur de *t*, les positions relatives du segment $[AM]$ et de la courbe $C_f$.

**Exercice 2 – 10 points – Amérique du nord 1 – Mai 22**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points suivants : $J\left(2;0;1\right)$, $K\left(1;2;1\right)$ et $L\left(-2;-2;-2\right)$.

**1. a.** Montrer que le triangle *JKL* est rectangle en *J*.

**b.** Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle *JKL* en $cm^2$.

**c.** Déterminer une valeur approchée au dixième près de l'angle géométrique $\widehat{JKL}$.

**2. a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\left(JKL\right)$.

**b.** En déduire une équation cartésienne du plan $\left(JKL\right)$.

Dans la suite, *T* désigne le point de coordonnées $\left(10;9;-6\right)$.

**3. a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\Delta$ orthogonale au plan $\left(JKL\right)$ et passant par *T*.

**b.** Déterminer les coordonnées du point *H*, projeté orthogonal du point *T* sur le plan $\left(JKL\right)$.

**c.** On rappelle que le volume *V* d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3}B\times h \text{ où } B \text{ désigne l'aire d'une base et } h \text{ la hauteur correspondante}$$

Calculer la valeur exacte du volume du tétraèdre *JKLT* en $cm^3$.