Interrogation de mathématiques n°4

Exercice 1 – 5 points (Centres étrangers 1 – juin 21)

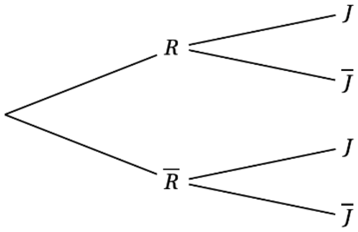
Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3}.
D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.
Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

Partie A

On interroge une personne au hasard et on considère les évènements suivants :

* R : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
* J : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopierez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.



2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.

3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française. Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.

4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun. La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.
Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.
1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.

2. Calculer $P(X = 5)$ et interpréter le résultat.

3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

Exercice 2 – 7 points (Amériques du nord 2 – mai 22)

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3;4]$ par :

$$p(x)=x^3-3x^2+5x+1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3;4]$.

2. Justifier que l'équation $p(x)=0$ admet dans l'intervalle $[-3;4]$ une unique solution qui sera notée α.

3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.

4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3;4]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3;4]$ par :

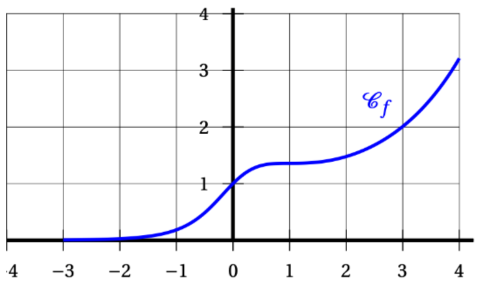
$$f(x)=\frac{e^x}{1+x^2}$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

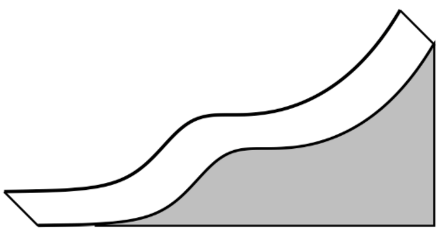
1. a. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3;4]$.

b. Justifier que la courbe C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe C_f comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$


Vue de profil du toboggan

a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

b. On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction *f*, a pour expression pour tout réel *x* de l'intervalle $[-3;4]$:

$$f''(x)=\frac{p(x)(x-1)e^x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

où *p* est la fonction définie dans la partie A.
En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Exercice 3 – 6 points (Amériques du nord 1 – mai 22)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. Affirmation 1 : Pour tout réel *x* : $1-\frac{1-e^x}{1+e^x}=\frac{2}{1+e^{-x}}$.

2. On considère la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$.

Affirmation 2 : L'équation $g(x)=\frac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

3. On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2e^{-x}$ et on note *C* sa courbe dans un repère orthonormé.
Affirmation 3 : L'axe des abscisses est tangent à la courbe *C* en un seul point.

4. On considère la fonction *h* définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=e^x\left(1-x^2\right)$.

Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction *h* n'admet pas de point d'inflexion.

5. Affirmation 5 : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+x}=0$.

6. Affirmation 6 : Pour tout réel *x*, $1+e^{2x}\geq 2e^x$.

Exercice 4 – 2 points

Soit *X* une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n;p)$.

On donne : $E(X)=43{,}2$ et $V(X)=27{,}648$.

Déterminer $(1-p)$ puis *p* et *n*.